Prawdopodobieństwo

http://www.matemaks.pl/

Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa

http://www.matemaks.pl/wstep-do-rachunku-prawdopodobienstwa.html

Rachunek prawdopodobieństwa pomaga obliczyć **szansę** zaistnienia pewnego określonego zdarzenia.

Przykład 1.
Jaka jest szansa, że dzisiaj jest niedziela?

Rozwiązanie:
Mamy 7 możliwości (bo jest 7 dni tygodnia).
Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dzisiaj jest niedziela, wynosi: 17.
Rachunek prawdopodobieństwa bazuje na kombinatoryce.
Żeby obliczyć szansę dowolnego zdarzenia (nazwijmy go literką A),
musimy określić liczbę zdarzeń sprzyjających oraz liczbę wszystkich możliwych zdarzeń (do tego celu stosujemy kombinatorykę).
Następnie do obliczenia prawdopodobieństwa korzystamy z jednego wzoru:
$P(A) = |A| / |\Omega|$
gdzie:
$|A|$ - to liczba zdarzeń sprzyjających (moc zbioru $|A|$)
$|\Omega|$ - to liczba wszystkich możliwych zdarzeń (moc zbioru $|\Omega|$)

Pojęcia stosowane w rachunku prawdopodobieństwa:

- **Doświadczenie losowe** - czynność którą wykonujemy,
  np.: rzut kostką, wybór dnia tygodnia.
- **Zdarzenie elementarne** - zdarzenie (tylko jedno!) jakie może wydarzyć się w doświadczeniu losowym,
  np.: wypadło 5 oczek, wybrano środę.
- **Zdarzenie losowe** - zbiór jednego lub kilku zdarzeń elementarnych, np.: wypadła parzysta liczba oczek (2, 4, lub 6), wybrano dzień powszedni.
- **Moc zbioru** - liczba elementów danego zbioru,
  np.: $|\{2,4,6\}|=3$, $|\{\text{dni powszednie}\}|=5$.

Stosowane oznaczenia:

- **Ω** - zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego,
  np.: dla rzutu kostką $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
- ***A*** - zdarzenie losowe (podzbiór Ω), np.: jeżeli A to zdarzenie polegające na tym, że wypadła parzysta liczba oczek, to: $A=\{2,4,6\}$.

Przykład 2.
Oblicz prawdopodobieństwo, że w rzucie kostką wypadnie liczba oczek mniejsza od 5.

Rozwiązanie:
Zdarzeniem losowym w tym zadaniu jest rzut kostką.
Wprowadźmy następujące oznaczenia:
Ω - to zbiór wszystkich możliwych wyników. Zatem $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
A - to zbiór tych wyników, w których wypadła liczba oczek mniejsza od 5.
Zatem $A=\{1,2,3,4\}$.
Obliczamy moc zbioru A oraz zbioru Ω:
$|\Omega|=6$ (bo tyle jest wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych,
czyli wyników rzutu kostką)
$|A|=4$ (bo w skład zbioru A wchodzą 4 zdarzenia elementarne)
Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest następujące:
$P(A)=|A|/ |\Omega| = 4/6=2/3$

Wzory i własności w rachunku prawdopodobieństwa

Własności prawdopodobieństwa:

- Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia losowego A jest zawsze liczbą z przedziału $\langle 0;1\rangle$.

  $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$

- Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1.

  $\mathbf{P(\Omega)= 1}$

- Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0.

  $\mathbf{P(\emptyset) = 0}$

Przydatne wzory:

- Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego:

  $\mathbf{P(A') = 1 - P(A)}$

- Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń

  $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Prawdopodobieństwo warunkowe:

- Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B liczymy ze wzoru:

  $\mathbf{P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)}$ gdzie $P(B)>0$

Prawdopodobieństwo całkowite:

- Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne oraz mają prawdopodobieństwa dodatnie, które sumują się do jedynki, to dla dowolnego zdarzenia A zachodzi wzór:

  $$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

Wzór Bayesa:

- Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne oraz mają prawdopodobieństwa dodatnie, które sumują się do jedynki, to dla dowolnego zdarzenia A zachodzi wzór:

  $$P(B_k | A) = P(A | B_k) \cdot P(B_k) / P(A)$$

Schemat Bernoulliego:

- W schemacie Bernoulliego prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów w n próbach można obliczyć ze wzoru:

  $$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

  $P_n(k) = (n\ po\ k)\ p^k * (1-p)^{n-k}$

  gdzie p - to prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie

Zadania z klasycznego rachunku prawdopodobieństwa

http://www.matemaks.pl/zadania-z-klasycznego-rachunku-prawdopodobienstwa.html

Zadanie 1.
Ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ wybieramy losowo jedną liczbę.
Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 4.
Wówczas
A. $p<15$ **B.** $p=15$ **C.** $p=14$ **D.** $p>14$

P = 3/15 = 1/15 Odp. **B**

Zadanie 2.
Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ wybieramy losowo jedną liczbę.
Liczba p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3. Wtedy
A. $p<0{,}25$ **B.** $p=0{,}25$ **C.** $p=13$ **D.** $p>13$

|Ω| = 8
|A| = 2 P(A) = 2/8 = ¼ Odp. B

Zadanie 3.
http://www.matemaks.pl/zadania-z-klasycznego-rachunku-prawdopodobienstwa.html

Ze zbioru liczb {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3 lub przez 2.

Ω = {1, 2, 3, …, 11} |Ω| =11 – moc Ω
A = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10} - zbiór liczb podzielnych przez 3 lub przez 2
|A| = 7
P(A) = |A| / | Ω| = 7/11

Zadanie 4.
Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych wybieramy losowo jedną liczbę.
Prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 30 jest równe
A. 1/90 **B.** 2/90 **C.** 3/90 **D.** 10/90

Ω = {10, 11, 12, …, 99} - zbiór liczb naturalnych 2-cyfrowych
| Ω| = 99 – 10 + 1 = 99 – 9 = 90
A = {30, 60, 90}
|A| = 3
P(A) = |A| / | Ω| = 1/30 = 1/3 *Odp. C*

Zadanie 5.
Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych wybieramy losowo jedną liczbę.
Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 15.

Ω = {10, 11, 12, …, 99} - zbiór liczb naturalnych 2-cyfrowych
| Ω| = 99 – 10 + 1 = 99 – 9 = 90
A = {15, 30, 45, 60, 75, 90} |A| = 6
P(A) = |A| / | Ω| = 6 / 90 = 1/15

Zadanie 6.
Ze zbioru liczb {1,2,3,4,5,6,7} losujemy trzy razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, wśród których nie będzie liczby mniejszej od 3.

Ω – zbiór wszystkich możliwych losowań 3 liczb
A – zbiór takich losowań, że wśród wylosowanych liczb nie ma liczby mniejszej od 3
|Ω| = 7*6*5 = 210 *(za I razem 7 możliwości (w kolejnym losowaniu o 1 liczbę mniej)*
A = {3, 4, 5, 6, 7} - w I losowaniu, w kolejnych o 1 liczbę mniej

|A| = 5*4*3 = 60
P(A) = |A| / |Ω| = 60 / 210 = 2/7

Zadanie 7.

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry.
Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu oczek równego 5.

Ω – zbiór wyników 2-krotnego rzutu kostką
A – zbiór wyników 2-krotnego rzutu kostką, gdzie iloczyn oczek = 5
|Ω| = 6*6 = 36
A = { (1, 5), (5, 1) }
|A| = 2
P(A) = |A| / |Ω| = 2/36 = 1/18

Zadanie 8.

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym,
że liczba oczek w drugim rzucie jest o 1 większa od liczby oczek w pierwszym rzucie.

Ω – zbiór możliwych wyników rzutu 2 kostkami
A – zbiór takich rzutu 2 kostkami, ze w drugim rzucie wypadło o 1 oczko mniej
|Ω| = 6*6 = 36
A = { (1, 2). (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) } |A| = 5
P(A) = |A| / |Ω| = 5/36

Zadanie 9.

Ze zbioru liczb {1,2,3,4,5,6,7} losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb,
których iloczyn jest podzielny przez 6.

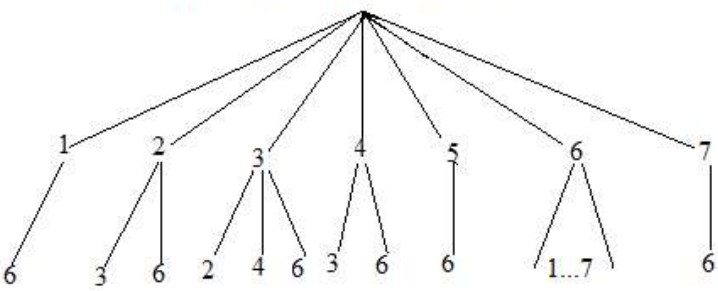
Ω – zbiór wszystkich możliwych losowań dwóch liczb
A – zbiór tych losowań, że iloczyn jest podzielny przez 6

|Ω| = 7*7 = 49

|A| = 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 7 + 1 = 17

P(A) = |A|/|Ω| = 17/49

Drzewo przebiegu doświadczenia



Zadanie 10.

Rzucamy cztery razy symetryczną monetą.
Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie jednej reszki
czy wyrzucenie orła w co drugim rzucie?

|Ω| = 2*2*2*2 = 16   (4 rzuty, w każdym 2 możliwości)
A = { (R,O,O,R), (O,R,O,O), (O,O,R,O), (O,O,O,R) }
|A| = 4
P(A) = 4/16 = ¼

B = { (O,R,O,R), (R,O,R,O) } |B| = 2
P(B) = 2/16 = 1/8
P(A) > P(B)

Zadanie 11.
Jacek rzucił pięć razy symetryczną sześcienną kostką do gry.
Liczba wyrzuconych oczek wynosiła kolejno 1,2,3,4,5.
Prawdopodobieństwo, że w szóstym rzucie wypadnie 6 oczek jest równe:
A. 1 **B.** 0 **C.** 5/6 **D.** 1/6
P(A) = 1/6

Zadanie 12.
Ze zbioru liczb {1,2,3,4,6,8,12,14,15} wybieramy losowo jedną liczbę.
Prawdopodobieństwo, że wybierzemy liczbę, której dzielnikiem jest liczba 3, wynosi:
A. 5/9 **B.** 4/9 **C.** 1/3 **D.** 2/3
| Ω | = ilość liczb
|Ω| = 9
|A| = ilość liczb podzielnych przez 3
|A| =4
P(A) = |A| / |Ω| = 4/9

Zadanie 13.
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo dwukrotnego otrzymania pięciu oczek jest równe
A. 1/6 **B.** 1/12 **C.** 1/18 **D.** 1/36

Prawdopodobieństwo wyrzucenia piątki w jednym rzucie = 1/6
1/6 * 1/6 = 1/36

Zadanie 14.
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech *p* oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 5. Wtedy
A. *p*=1/36 **B.** *p*=1/18 **C.** *p*=1/12 **D.** *p*=1/9

|Ω| = 6*6 = 36
A = { (1. 5). (5, 1) } |A| = 2
P(A) = |A| / |Ω| = 2/36 = 1/8

Zadanie 15.
Ze zbioru liczb {1,2,3,...,7} losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem.
Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

Ω – zbiór wszystkich możliwych losowań

A – zbiór tych losowań, że suma liczb jest podzielna przez 3

(a, b)

$a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$

$|A| = 16$

$$P(A) = \frac{16}{49}$$

Losowania sprzyjające						
(1, 2)	(2, 1)	(3, 3)	(4, 2)	(5, 1)	(6, 3)	(7, 2)
(1, 5)	(2, 4)	(3, 6)	(4, 5)	(5, 4)	(6, 6)	(7, 5)
	(2, 7)			(5, 7)		

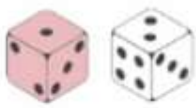
Zadanie 16.
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi

A. 1/6 **B.** 1/9 **C.** 1/12 **D.** 1/18

$|A| = 2$

$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

$3 = 1 + 2$



lub

$3 = 2 + 1$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Zadanie 17.
Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ wybieramy losowo jedną liczbę.
Liczba p jest prawdopodobieństwem wylosowania liczby podzielnej przez 2 lub przez 3. Wtedy

A. p=5/11 **B.** p=6/11 **C.** p=7/11 **D.** p=8/11

$$p = \frac{\text{liczba liczb podzielnych przez 2 lub przez 3}}{\text{liczba wszystkich liczb w danym zbiorze}} = \frac{|\{2,3,4,6,8,9,10\}|}{|\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}|} = \frac{7}{11}$$

Zadanie 18.
Rzucamy trzy razy symetryczną monetą.
Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednej reszki jest równe

A. 7/8 **B.** 1/2 **C.** 1/4 **D.** 1/8

Zdarzenie przeciwne – wypadły 3 orły – 1 przypadek niekorzystny

|Ω| = 2 * 2 * 2 = 8
|A| = 8-1 = 7
P(A) = |A| / |Ω| = 7/8

Zadanie 19.
Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ wybieramy losowo jedną liczbę.
Liczba p jest prawdopodobieństwem wylosowania liczby podzielnej przez 2. Wtedy
A. $p<0,25$ **B.** $p=0,25$ **C.** $p=0,5$ **D.** $p>0,5$

$$p = \frac{\text{liczba liczb podzielnych przez 2 w danym zbiorze}}{\text{liczba wszystkich liczb w danym zbiorze}} = \frac{|\{2,4,6,8\}|}{|\{1,2,3,4,5,6,7,8\}|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 20.
Spośród dodatnich liczb dwucyfrowych losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby.
Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb parzystych.

{10, 11, 12, … 90} – liczby 2-cyfrowe
|Ω| = 90 * 89 (2 losowania, drugie bez zwracania)
{2, 4, 6, … 90} – liczby parzyste - 45 liczb
|A| = 45 * 44 (w I losowaniu 45, w II o 1 mniej)
P(A) = |A| / |Ω| = (45*44) / (98*99) = 22/89

Zadanie 21.
Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Liczba p jest prawdopodobieństwem wylosowania liczby podzielnej przez 3. Wtedy
A. $p<0,3$ **B.** $p=0,3$ **C.** $p=1/3$ **D.** $p>1/3$

$$p = \frac{\text{liczba liczb podzielnych przez 3 w danym zbiorze}}{\text{liczba wszystkich liczb w danym zbiorze}} = \frac{|\{3,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6,7,8\}|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Zadanie 22.
W sklepie wśród dziesięciu żarówek trzy są wadliwe, a pozostałe są dobrej jakości.
Klient kupił losowo wybraną jedną żarówkę (bez sprawdzania).
Po namyśle dokupił jeszcze jedną.
Czy prawdopodobieństwo zdarzenia, że klient, otrzyma obie żarówki dobrej jakości, jest większe od 0,5?
Odpowiedź uzasadnij, wykonując odpowiednie obliczenia.

P = 7/10 * 6/9 = 42/ 90 < 1/2

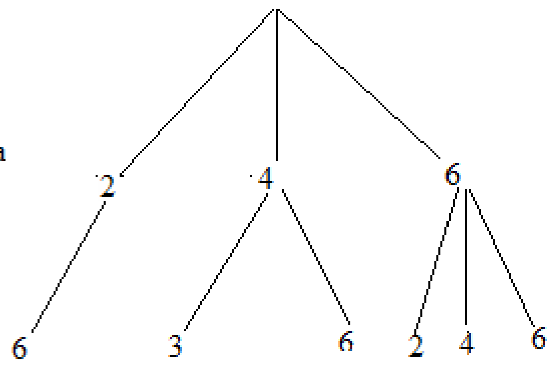
http://www.matemaks.pl/zadania-z-klasycznego-rachunku-prawdopodobienstwa.html

Zadanie 23.
Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

$|\Omega| = 6*6 = 36$

$|A| = 6$ ilość liści drzewa

$P(A) = 6/36 = 1/6$



Zadanie 24.

W pudełku są 4 kule białe i *x* kul czerwonych.

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej jest równe 35, gdy

A. *x*=6 **B.** *x*=8 **C.** *x*=10 **D.** *x*=12

x / (x+4) = 3/5

5x = 3x + 12

2x = 12

x = 6

Zadanie 25.

W pojemniku umieszczono 50 drewnianych klocków, przy czym każdy klocek ma kształt sześcianu lub kuli, oraz każdy klocek jest czerwony lub niebieski.

Wiadomo, że w pojemniku znajduje się dokładnie 15 czerwonych sześcianów, 18 klocków niebieskich i 31 klocków mających kształt kuli.

Z pojemnika losowo wybieramy jeden klocek.

Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowany klocek jest niebieską kulą?

Dla ułatwienia obliczeń sporządzamy tabelę z danymi i obliczamy kolejno brakujące elementy

	Sześciany	Kule	Wszystkie klocki
Czerwone	15		
Niebieskie			18
Czerwone i niebieskie		31	50

$|\Omega| = 50$ $|A| = ?$

Kolejność wypełniania tabelki

	Sześciany	Kule	Wszystkie klocki
Czerwone	15	17 2)	32 1)
Niebieskie	4)	14 3)	18
Czerwone i niebieskie	5)	31	50

|Ω| = 50 |A| = ?

Kolejność obliczeń w tabeli 1) 2) 3)
Dla kontroli: 4) 5)

	Sześciany	Kule	Wszystkie klocki
Czerwone	15	17	32
Niebieskie	4	14	18
Czerwone i niebieskie	19	31	50

|Ω| = 50
|A| = 40

P(A) = |A| / |Ω| = 14/50 = 7 / 25

Zadanie 26.
W urnie jest 6 kul oznaczonych kolejnymi cyframi od 1 do 6.
Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym losowaniu jednej kuli,
przy czym po pierwszym losowaniu kula nie wraca do urny.
Cyfra, jaką jest oznaczona pierwsza wylosowana kula, jest cyfrą jedności,
a cyfra na drugiej kuli jest cyfrą dziesiątek liczby dwucyfrowej.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia *A* polegającego na tym, że otrzymana liczba jest taką liczbą podzielną przez 3, której cyfra jedności jest nie większa niż 4.

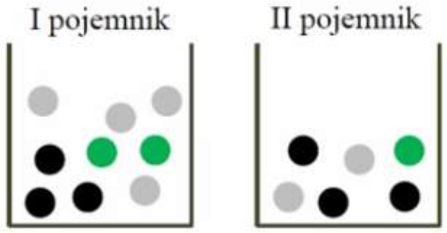
5 * 6 = 30
|Ω| = 30
A = { (2, 1), (5, 1), (1, 2), (4, 2), (6, 3), (2, 4), (5, 4)} *- liczba dzieli się przez 3, cyfra jedności <=4*
|A| = 7
P(A) = |A| / |Ω| = 7/30

Zadanie 27.
Rzucamy dwukrotnie kostką do gry.
Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba oczek otrzymana w pierwszym rzucie
jest większa od liczby oczek otrzymanej w drugim rzucie?

Ω – zbiór wszystkich możliwych rzutów
A – zbiór rzutów, w których w pierwszym rzucie wpadła większa liczba oczek niż w drugim rzucie
|Ω| = 6*6 = 36
A = { (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4),
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) }
|A| = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
P(A) = 15/36 = 5/12

Zadanie 28.

Dane są dwa pojemniki. W pierwszym z nich znajduje się 9 kul: 4 białe, 3 czarne i 2 zielone.
W drugim pojemniku jest 6 kul: 2 białe, 3 czarne i 1 zielona.
Z każdego pojemnika losujemy po jednej kuli.
Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania <u>dwóch</u> kul <u>tego samego koloru</u>.



A – wyciągnięto kule tego samego koloru

Ω – zbiór wszystkich możliwych wyciągnięć dwóch kul

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

$$\overline{\overline{A}} = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8 + 9 + 2 = 19$$

białe, czarne, zielone

$$\overline{\overline{\Omega}} = 9 \cdot 6 = 54$$

$$P(A) = \frac{19}{54}$$

Na ile sposobów można wybrać k kul z pudełka zawierającego n kul?

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

<u>Przykład</u>

1) Na ile sposobów można wybrać 1 kulę z pudełka zawierającego 9 kul?

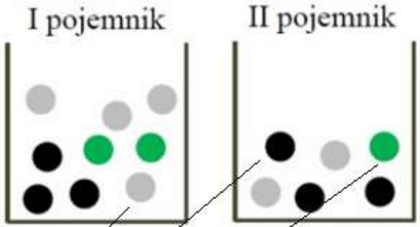
$$\binom{9}{1} = \frac{9!}{1!\,(9-1)!} = \frac{9!}{8!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 9$$

2) Na ile sposobów można wybrać 2 kule z pudełka zawierającego 9 kul?

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

Zadanie 29.

Dane są dwa pojemniki. W pierwszym z nich znajduje się 9 kul: 4 białe, 3 czarne i 2 zielone.
W drugim pojemniku jest 6 kul: 2 białe, 3 czarne i 1 zielona.
Z każdego pojemnika losujemy po jednej kuli.
Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania <u>dwóch kul</u> <u>różnych</u> kolorów.



A – wyciągnięto kule tego różnych kolorów

Ω – zbiór wszystkich możliwych wyciągnięć dwóch kul

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

białe,   czarne, zielone   zielone (z I), białe, czarne (z II)

$$\overline{\overline{A}} = 4 \cdot (3 + 1) + 3 \cdot (2 + 1) + 2 \cdot (2 + 3) = 16 + 9 + 10 = 35$$

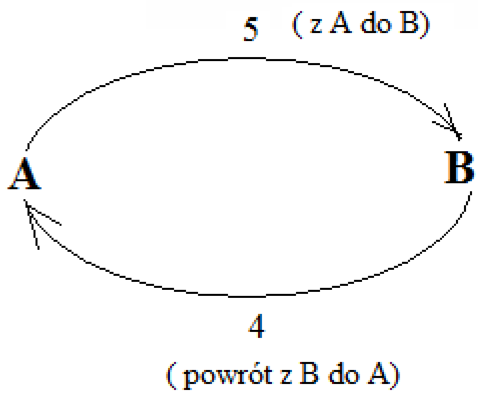
czarne (z I) , białe, zielone (z II)

$$\overline{\overline{\Omega}} = 9 \cdot 6 = 54$$

9 kul w I, 6 kul w II pojemniku

$$P(A) = \frac{35}{54}$$

Zadanie 770.
Ze wsi A do wsi B prowadzi 5 ścieżek przez las.
Na ile sposobów można odbyć spacer $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$ tak,
aby spacer ze wsi B do wsi A odbyć inną ścieżką niż ze wsi A do wsi B?
A. 5^4 **B.** $5+4$ **C.** 4^5 **D.** $5 \cdot 4$



$\boxed{5 * 4 = 20}$

Przykład 49.
Oblicz prawdopodobieństwo, że rzucając dwiema kostkami do gry otrzymamy:
a) sumę oczek równą 6,
b) iloczyn oczek równy 6,
c) sumę oczek mniejszą niż 11,
d) iloczyn oczek będący liczbą parzystą,
e) liczby oczek których minimum wynosi 1,
f) liczby oczek których maksimum jest mniejsze od 6,
http://www.matemaks.pl/materialy/rachunek_prawdopodobienstwa/zadanie1.pdf

Przykład 50.
Oblicz prawdopodobieństwo, że losując jednocześnie trzy kule z urny zawierającej
7 kul żółtych, 5 kul niebieskich, 4 kule czerwone, 3 kule zielone i 2 kule pomarańczowe
wylosujemy:
a) wszystkie kule tego samego koloru,
b) dokładnie 2 kule niebieskie,
c) wszystkie kule w kolorach ciepłych (żółty, czerwony, pomarańczowy),
d) więcej kul w kolorach ciepłych niż w kolorach zimnych,
e) kule, wśród których nie będzie żadnej kuli kolory czerwonego,
f) co najmniej jedną kulę pomarańczową,
g) co najwyżej 2 kule w kolorach podstawowych (żółty, czerwony, niebieski).
http://www.matemaks.pl/materialy/rachunek_prawdopodobienstwa/zadanie2.pdf

Przykład 51.
Losujemy kolejno, ze zwracaniem dwa razy po jednej liczbie ze zbioru $Z = \{1,2,3,4\}$.
Oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) druga z wylosowanych liczb jest większa od pierwszej,
b) druga z wylosowanych liczb jest dzielnikiem pierwszej wylosowanej liczby,
c) wylosowane liczby różnią się o 1,
d) wylosowano liczby, których iloczyn jest nieparzysty.
http://www.matemaks.pl/materialy/rachunek_prawdopodobienstwa/zadanie3.pdf

Przykład 52.
Losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania ze zbioru $Z = \{1,2,3,4\}$.
Oblicz prawdopodobieństwo, że:
a) druga z wylosowanych liczb jest większa od pierwszej,
b) druga z wylosowanych liczb jest dzielnikiem pierwszej wylosowanej liczby,
c) wylosowane liczby różnią się o 1,
d) wylosowano liczby, których iloczyn jest nieparzysty.
http://www.matemaks.pl/materialy/rachunek_prawdopodobienstwa/zadanie4.pdf

Przykład 53.
Oblicz prawdopodobieństwo, że losując jednocześnie dwie liczby ze zbioru
$Z = \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$ wylosujemy dwa miejsca zerowe funkcji:

http://www.matemaks.pl/materialy/rachunek_prawdopodobienstwa/zadanie5.pdf

Przykład 55.
Oblicz prawdopodobieństwo, że losując kolejne, ze zwracaniem dwie liczby ze zbioru
$Z = \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$ nie otrzymamy żadnego miejsca zerowego funkcji:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{\sqrt{3x+2}}$$

http://www.matemaks.pl/materialy/rachunek_prawdopodobienstwa/zadanie7.pdf

Przykład 56.
O zdarzeniach A i B wiadomo, że $P(A') = 0{,}7$ i $P(B') = 0{,}72$ oraz $P(A \cap B) = 0{,}06$.
Oblicz $P(A)$, $P(B)$ oraz $P(A \cup B)$.

http://www.matemaks.pl/materialy/rachunek_prawdopodobienstwa/zadanie8.pdf

Przykład 57.
Oblicz prawdopodobieństwo $P(A)$, $P(B)$ oraz $P(A \cap B)$ jeżeli wiadomo,
że $P(A \setminus B) = 0{,}1$ oraz $P(B \setminus A) = 0{,}2$ oraz $P(A \cup B) = 0{,}6$.

http://www.matemaks.pl/materialy/rachunek_prawdopodobienstwa/zadanie9.pdf