Prawdopodobieństwo

Zad. 1:

Ze zbioru $Z = \left\{ x : x \in N \text{ i } \frac{1}{\log x} + \frac{1}{1 - \log x} > 1 \right\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby i tworzymy z nich liczbę dwucyfrową, w której cyfrą dziesiątek jest pierwsza z wylosowanych liczb. Sprawdź, czy zdarzenia: A - utworzona liczba jest parzysta, B - utworzona liczba jest podzielna przez 3, są niezależne.

Odp.: $Z = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{9}{28}$, $P(A \cap B) = \frac{9}{56}$. Zdarzenia *A* i *B* są niezależne.

Zad. 2:

Spośród wszystkich liczb dwucyfrowych większych od 10 wybieramy losowo dwie liczby. Określ zbiór zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia. Niech *A* oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest liczbą parzystą, a *B* - iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą parzystą. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń *A* i *B* oraz sprawdź, czy te zdarzenia są niezależne.

Odp.: $\Omega = \{(x, y) : x, y \in \{11, 12, 13, \ldots, 99\} \text{ i } x \neq y\}$. $P(A) = \frac{44}{89}$, $P(B) = \frac{133}{178}$, $P(A \cap B) = \frac{43}{178}$. Zdarzenia *A* i *B* są zależne.

Zad. 3:

Spośród liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 losujemy ze zwracaniem trzy razy po jednej liczbie i ustawiamy je w ciąg w kolejności losowania. Zdarzenie *A* polega na tym, że wylosowane liczby tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$ lub 3, *B* - wylosowane liczby tworzą ciąg arytmetyczny, *C* - za pierwszym razem wylosowano liczbę parzystą. Oblicz P(A), P(B|C).

Odp.: $P(A) = \frac{3}{9^3} = \frac{1}{243}$, $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{16}{9^3}}{\frac{4 \cdot 9^2}{9^3}} = \frac{4}{81}$.

Zad. 4:

Dany jest zbiór $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, gdzie $n \geq 3$.

a) Ze zbioru *A* losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych liczb jest mniejsza (większa) od drugiej.

*b) Zbiór *A* dzielimy losowo na dwa niepuste podzbiory. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczby 1 i *n* będą w tym samym podzbiorze.

Odp.: a) $\frac{\binom{n}{2}}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{2(2^{n-2} - 1)}{2^{n-1} - 1} = \frac{2^{n-2} - 1}{2^{n-1} - 1}$.

Zad. 5:

Przyjmując, że urodzenie chłopca i dziewczynki jest jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo tego, że w rodzinie z pięciorgiem dzieci jest co najwyżej jeden chłopiec lub są sami chłopcy.

Odp.: $\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}$.

Zad. 6:
Spośród 90 losów loterii, wśród których było 6 wygrywających, Ania, Kasia i Wojtek wylosowali kolejno po jednym losie.
a) Która z osób miała największą szansę wygrania?
b) Oblicz, jak zmieni się szansa wygrania Wojtka, jeśli jego koleżanki wygrały.
Odp.: a) Wszystkie osoby miały jednakowe szanse wygrania równe $\frac{1}{15}$. b) Szansa wygrania Wojtka zmniejszy się o $\frac{7}{330}$ i będzie równa $\frac{1}{22}$.

Zad. 7:
Wśród *n* losów loterii jest 5 wygrywających. Kupujemy trzy losy. Dla jakich liczb *n* prawdopodobieństwo kupienia dokładnie dwóch losów wygrywających, jest większe od $\frac{5}{38}$?
Odp.: $n \in \{5, 6, 7, \ldots, 19\}$.

Zad. 8:
Wśród *n* losów loterii są 4 wygrywające.
a) Kupujemy dwa losy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że zakupione losy będą wygrywające?
b) Kupujemy trzy losy. Dla jakich liczb *n* prawdopodobieństwo tego, że zakupione losy będą wygrywające, jest większe od 0,2?
Odp.: a) $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{12}{n(n-1)}$; b) $n = 4$ lub $n = 5$.

Zad. 9:
Z urny zawierającej 40 losów wybieramy dwa losy. Prawdopodobieństwo wybrania dwóch losów wygrywających jest równe prawdopodobieństwu wybrania jednego losu wygrywającego i jednego przegrywającego. Ile jest losów wygrywających w tej urnie? Które ze zdarzeń jest bardziej prawdopodobne: wybranie dwóch losów wygrywających czy dwóch przegrywających?
Odp.: W urnie jest 27 losów wygrywających. Wybranie dwóch losów wygrywających jest bardziej prawdopodobne.

Zad. 10:
W urnie znajduje się *n* kul białych i 2n kul czarnych. Wybieramy losowo dwie kule. Dla jakiej wartości *n* prawdopodobieństwo wylosowania kul o różnych kolorach jest równe prawdopodobieństwu wylosowania kul tego samego koloru?
Odp.: $n = 3$.

Zad. 11:
W pudełku jest 400 kul, w tym *n* czerwonych. Wybieramy losowo dwie kule. Prawdopodobieństwo wylosowania obu kul czerwonych jest równe $\frac{1}{760}$.
a) Ile kul czerwonych jest w tym pudełku?
b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że żadna z wylosowanych kul nie jest czerwona.
Odp.: a) $n = 15$; b) $\frac{\binom{385}{2}}{\binom{400}{2}} = \frac{88}{95} \approx 0{,}93$.

Zad. 12:
W urnie I są dwie kule białe i dwie czarne. W urnie II jest pięć kul białych i trzy czarne. Rzu-

camy dwiema kostkami do gry. Jeśli iloczyn otrzymanych oczek jest liczbą nieparzystą, to losujemy jedną kulę z urny I, w przeciwnym wypadku losujemy jedną kulę z urny II.
a) Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej?
b) Ile co najmniej razy należy powtórzyć opisane doświadczenie losowe, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż $\frac{5}{7}$, co najmniej raz wyciągnąć kulę białą?
Odp.: a) $\frac{9}{36}\cdot\frac{2}{4}+\frac{27}{36}\cdot\frac{3}{8}=\frac{13}{32}$; b) Co najmniej dwa razy.

Zad. 13:
W dwóch koszykach jest po 10 białych piłek tenisowych. Jak dodatkowo rozmieścić w tych koszykach 20 żółtych piłek, aby prawdopodobieństwo wylosowania żółtej piłki z losowo wybranego koszyka było równe $\frac{7}{15}$?
Odp.: Do jednego koszyka należy dołożyć 5 żółtych piłek, a do drugiego 15.

Zad. 14:
Kasia i Olek postanowili kupić pióro lub długopis. Wśród pokazanych przez sprzedawcę piór 10 pochodziło firmy F_1 i 20 z firmy F_2, a wśród długopisów 10 z firmy F_3, 15 z firmy F_4 i 5 z firmy F_5. Kasia kupiła jedno pióro, a Olek długopis. Które z dzieci ma większą szansę kupienia przyboru dobrej jakości, jeżeli wiadomo, że towar wybrakowany w produkcji firmy F_1 stanowi 2%, w F_2 - 3%, w F_3 - 1%, w F_4 - 4%, w F_5 - 6%?
Odp.: Kasia ma większą szansę $\left(1-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{100}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{100}\right)>1-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{100}+\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{100}\right)\right)$.

Zad. 15:
Wykonano trzy rzuty symetryczną kostką do gry. W pierwszym rzucie wypadły cztery oczka. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma oczek otrzymanych w trzech rzutach jest większa od 10.
Odp.: $\frac{7}{12}$.

Zad. 16:
W salonie gier do którego udali się Wojtek, Piotrek, i Adam, znajdują się trzy automaty: A_1, A_2, A_3. Prawdopodobieństwo wygrania na automacie A_1 wynosi 0,25, na automacie A_2 - 0,8, a na automacie A_3 - 0,6 (niezależnie od umiejętności i sprawności grającego). Każdy z chłopców zagrał trzy razy na wybranych przez siebie automatach w następującej kolejności: Wojtek - A_1, A_2, A_1, Piotrek - A_2, A_1, A_2, Adam - A_3, A_2, A_1. Jeżeli grający wygrał co najmniej dwukrotnie, uzyskał nagrodę. Który z chłopców miał największą szansę zdobycia nagrody?
Odp.: Największą szansę miał Piotrek (prawdopodobieństwo wygrania nagrody przez Wojtka wynosi $2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\approx 0{,}36$, przez Piotrka $2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=0{,}72$, przez Adama $\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=0{,}59$).

Zad. 17: (profil matematyczno-fizyczny)
Ze zbioru $Z=\{x : x\in C \text{ i } 3\cdot 9^x-82\cdot 3^x+27\leq 0\}$ losujemy kolejno bez zwracania współczynniki *a, b, c* funkcji $f(x)=ax^2+bx+c$.
a) Podaj liczbę tak otrzymanych funkcji.
b) Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: A - otrzymana funkcja jest parzysta, B - otrzymana funkcja jest malejąca w zbiorze liczb rzeczywistych, C - wykres funkcji f przechodzi przez punkt $(0, 2)$ i funkcja osiąga minimum.
Odp.: a) 60 $(Z=\{-1, 0, 1, 2, 3\})$; b) $P(A)=\frac{1}{5}$, $P(B)=\frac{1}{20}$, $P(C)=\frac{1}{10}$.

Zad. 18: (profil matematyczno-fizyczny)
Ze zbioru $Z = \{x : x \in C \text{ i } 3 \cdot 9^x - 82 \cdot 3^x + 27 \le 0\}$ losujemy kolejno bez zwracania współczynniki *a, b, c* funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: A - otrzymana funkcja jest funkcją kwadratową, B - otrzymana funkcja jest funkcją liniową, C - otrzymana funkcja jest funkcją stałą, D - otrzymana funkcja jest funkcją parzystą, E - otrzymana funkcja jest funkcją malejącą w zbiorze liczb rzeczywistych.
Odp.: $Z = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$; $P(A) = \frac{4}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$, $P(C) = 0$, $P(D) = \frac{1}{5}$, $P(E) = \frac{1}{20}$.

Zad. 19: (profil matematyczno-fizyczny)
Spośród liczb $-2, -1, 1, 2$ losujemy kolejno ze zwracaniem liczby *x* i *y*. Doświadczenie powtarzamy tak długo, aż otrzymamy parę liczb spełniającą warunek $x^2 - y < 0$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wykonamy co najwyżej trzy takie doświadczenia.
Odp.: $1-\left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{169}{512}$.

Zad. 20: (profil matematyczno-fizyczny)
Zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 4n\}$ podzielono w sposób losowy na dwa równoliczne podzbiory. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest tyle samo liczb podzielnych przez *n* w obu tych podzbiorach.
Odp.: $\dfrac{\binom{4}{2}\binom{4n-4}{2n-2}}{\binom{4n}{2n}} = \dfrac{3n(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)}$.

Zad. 21: (profil matematyczno-fizyczny)
Wykonujemy trzy razy następujące doświadczenie: ze zbioru wszystkich liczb dwucyfrowych większych od 10 wybieramy losowo bez zwracania dwie liczby. Niech *A* oznacza zdarzenie polegające na tym, że co najmniej raz wylosowaliśmy dwie liczby, których suma jest liczbą parzystą, a *B* - dokładnie raz iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą parzystą. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń *A* i *B*.
Odp.: $P(A) = 1-\left(\frac{45}{89}\right)^3 \approx 0{,}82$, $P(B) = 3\cdot\frac{133}{178}\cdot\left(\frac{45}{178}\right)^2 \approx 0{,}14$.

Zad. 22: (profil matematyczno-fizyczny)
Spośród wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych wybieramy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo wybrania liczby, która przy dzieleniu przez 11 daję resztę 3?
Odp.: $\frac{80}{900} \approx 0{,}09$.

Zad. 23: (profil matematyczno-fizyczny)
Spośród 90 losów loterii, wśród których było *k* losów wygrywających, Marta, Kasia i Wojtek wylosowali kolejno po jednym losie.
a) Oblicz, która z osób miała największą szansę wygrania.
b) Dla $k = 15$ oblicz prawdopodobieństwo wygrania Wojtka i sprawdź, jak zmieni się szansa wygrania Wojtka, jeśli jego koleżanki wygrały.
Odp.: a) Wszystkie osoby miały jednakowe szanse wygrania. b) Prawdopodobieństwo wygrania Wojtka wynosi $\frac{15}{90}$. Szansa wygrania Wojtka zmniejszy się o $\frac{5}{264}$ i będzie równe $\frac{13}{88}$.

Zad. 24: (profil matematyczno-fizyczny)
W dwóch koszykach jest po 10 białych piłek tenisowych. Jak dodatkowo rozmieścić w tych koszykach 20 żółtych piłek, aby prawdopodobieństwo wylosowania żółtej piłki z losowo wybranego koszyka było mniejsze od $\frac{7}{15}$?

Odp.: Do jednej z urn należy dołożyć co najwyżej cztery żółte piłki, do drugiej - pozostałe.

Zad. 25: (profil matematyczno-fizyczny)
W urnie jest 80 losów, wśród których jest *k* wygrywających. Losujemy osiem razy po jednym losie, zwracając za każdym razem los do urny. Znajdź te wartości *k*, dla których prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie trzech losów wygrywających będzie największe.
Odp.: Prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie trzech losów wygrywających jest równe
$\binom{80}{8}\left(\frac{k}{80}\right)^3\left(\frac{80-k}{80}\right)^5$. Prawdopodobieństwo to jest największe dla $k = 30$.

Zad. 26: (profil matematyczno-fizyczny)
Spośród *n* kul, wśród których dokładnie trzy są białe, wybieramy losowo trzy kule. Niech X oznacza liczbę wylosowanych kul białych. Ile jest wszystkich kul w urnie, jeśli wartość oczekiwana zmiennej losowej X wynosi 1,5? Oblicz wariancję zmiennej losowej X.
Odp.: $n = 6$, $D^2X = \frac{9}{20}$.

Zad. 27: (profil matematyczno-fizyczny)
Cztery kule umieszczamy w sposób losowy w trzech szufladach, wśród których jedna jest wyróżniona. Oblicz wartość oczekiwaną liczby kul w wyróżnionej szufladzie.
Odp.: $EX = \frac{4}{3}$.

Zad. 28: (profil matematyczno-fizyczny)
Wśród 12 losów jest 5 wygrywających. Wybieramy losowo 6 losów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych losów są 2 losy wygrywające. Podaj rozkład liczby wybranych losów wygrywających oraz oblicz jej wartość oczekiwaną i wariancję.
Odp.: Rozważane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{\binom{5}{2}\binom{7}{4}}{\binom{12}{6}} = \frac{25}{66}$. Zmienna losowa ma rozkład:

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X = x)	$\frac{1}{132}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{25}{66}$	$\frac{25}{66}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{1}{132}$	0

$EX = 2{,}5$, $D^2X = \frac{35}{44}$.

Zad. 29*: (profil matematyczno-fizyczny)
W pewnym turnieju uczestniczy 8 drużyn. Każda drużyna gra z każdą z pozostałych drużyn jeden mecz. Pan W. wygrał na loterii 3 bilety na losowo wybrane mecze w tym turnieju. Oznaczmy przez X liczbę meczy z udziałem drużyny, której kibicuje Pan W., i które Pan W. obejrzał, korzystając z wygranych na loterii biletów. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.
Odp.: $EX = 0{,}75$.

Zad. 30: (profil matematyczno-fizyczny)
Dany jest zbiór $A = \{(x, y) : x \in C \text{ i } y \in C \text{ i } x^2 + y^2 \leq 4 \text{ i } y \geq |x| - 1\}$ punktów płaszczyzny. Niech X oznacza odległość między dwoma losowo wybranymi punktami ze zbioru *A*. Znajdź rozkład oraz oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X.
Odp.:

X	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	3
P(X = x)	$\frac{9}{28}$	$\frac{8}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{1}{28}$

$$EX = \frac{10+4\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{14} \approx 1{,}6, \quad D^2X = \frac{383-80\sqrt{2}-60\sqrt{5}-24\sqrt{10}}{196} \approx 1{,}65.$$

Zad. 31: (profil matematyczno-fizyczny)

Zmienna losowa X ma rozkład $\left\{\left(1, \frac{1}{24}\right), \left(2, \frac{11}{120}\right), \ldots, \left(x_n, p_n\right)\right\}$. Wartości zmiennej tworzą ciąg geometryczny, a prawdopodobieństwa, z jakimi zmienna X przyjmuje te wartości, tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.

Odp.: $EX = \frac{621}{40}$ (n = 6).

Zad. 32:

Ze zbioru $\{1, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: A - suma wylosowanych liczb jest większa od 10, B - za pierwszym razem wylosowano liczbę parzystą oraz P(A|B). Sprawdź niezależność zdarzeń *A* i *B*.

Odp.: $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, P(A|B) = 0,375. Zdarzenia *A* i *B* nie są niezależne.

Zad. 33:

W urnie znajduje się 6 kul ponumerowanych od 1 do 6. Losujemy kolejno bez zwracania dwie kule i zapisujemy ich numery w kolejności losowania. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: A - suma wylosowanych liczb jest większa od 8, B - za pierwszym razem wylosowano liczbę nieparzystą. Czy zdarzenia *A* i *B* są niezależne?

Odp.: $P(A) = \frac{4}{15}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. Zdarzenia *A* i *B* nie są niezależne.

Zad. 34:

Ze zbioru $Z = \left\{x : x \in C \ \text{ i } \ x^2 - 6x \le 0 \ \text{ i } \ \log_3\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0\right\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wylosowanych liczb jest liczbą nieparzystą.

Odp.: $\frac{3}{5}$ (Z = {2, 3, 4, 5, 6}).

Zad. 35:

Spośród liczb 1, 2, 3, 4, 5 losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: A - pierwsza z wylosowanych liczb jest nieparzysta, B - druga z wylosowanych liczb jest nieparzysta, C - obie wylosowane liczby są nieparzyste.

Odp.: $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(C) = \frac{3}{10}$.

Zad. 36:

Spośród cyfr 3, 4, 6, 7, 8 losujemy kolejno bez zwracania dwie cyfry i układamy z nich liczbę dwucyfrową, rozpoczynając od cyfry dziesiątek. Zdarzenie *A* polega na tym, że otrzymana liczba jest parzysta, a zdarzenie *B* na tym, że otrzymana liczba jest podzielna przez 3.

a) Sprawdź niezależność zdarzeń *A* i *B*.

b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest parzysta, jeżeli jest ona podzielna przez 3.

Odp.: a) $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. Zdarzenia *A* i *B* nie są niezależne.

b) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{3}$.

Zad. 37:
Ze zbioru $Z=\{a, 0, 1, 2, b\}$, gdzie *a* jest najmniejszą, a *b* największą z liczb należących do dziedziny funkcji $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$, losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby *x* i *y*. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowane liczby spełniają warunek $|x-y|=2$?
Odp.: 0,3 $(a=-1,\ b=3)$.

Zad. 38:
Z szafki, w której znajdują się trzy pary butów, wyjmujemy w sposób losowy dwa buty. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że oba wylosowane buty pochodzą z jednej pary?
Odp.: $\dfrac{3}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{5}$.

Zad. 39:
Na loterii jest 15 losów, z których 20% to losy wygrywające. Kupujemy dwa losy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród kupionych losów znajduje się los wygrywający?
Odp.: $1-\dfrac{\binom{12}{2}}{\binom{15}{2}}=\frac{13}{35}$.

Zad. 40:
W zestawie egzaminacyjnym umieszczono pytania z trzech działów matematyki: 24 z algebry, 18 z geometrii i 12 z rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wybiera losowo trzy pytania. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: A - zdający wybrał po jednym zadaniu z każdego działu, B - zdający wybrał trzy pytania z algebry, C - zdający wybrał dwa pytania z rachunku prawdopodobieństwa i jedno z geometrii.
Odp.: $P(A)=\dfrac{24\cdot 18\cdot 12}{\binom{54}{3}}=\frac{144}{689}$, $P(B)=\dfrac{\binom{24}{3}}{\binom{54}{3}}=\frac{506}{6201}$, $P(C)=\dfrac{\binom{12}{2}\cdot\binom{18}{1}}{\binom{54}{3}}=\frac{33}{689}$.

Zad. 41:
W pudełku znajduje się 5 czerwonych piłeczek i 6 białych. Z pudełka wyjmujemy losowo dwie piłeczki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:
a) co najmniej jedna z wybranych piłeczek jest czerwona;
b) obie wybrane piłeczki są tego samego koloru.
Odp.: a) $1-\dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}=\frac{8}{11}$; b) $\dfrac{\binom{5}{2}+\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}}=\frac{5}{11}$.

Zad. 42:
Wśród 20 żarówek są 4 wadliwe. Wybieramy losowo trzy żarówki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
a) wszystkie żarówki są dobre;
b) dwie z wybranych żarówek są dobre i jedna wadliwa.

Odp.: a) $\frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{28}{57}$; b) $\frac{\binom{16}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{8}{19}$.

Zad. 43:
W urnie znajduje się *n* kul białych i 6 czarnych. Wybieramy losowo dwie kule. Prawdopodobieństwo tego, że obie wylosowane kule są białe, jest równe $\frac{1}{2}$. Oblicz *n*.
Odp.: n = 15.

Zad. 44:
Na loterii było 12 losów wygrywających i 3 przegrywające. Janek kupił dwa losy i jeden z nich podarował siostrze. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że siostra Janka otrzymała los przegrywający?
Odp.: $\frac{22}{35}\cdot 0 + \frac{1}{35}\cdot 1 + \frac{12}{35}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5}$.

Zad. 45:
Z pudełka, w którym jest 12 kul białych, 9 zielonych, i 6 niebieskich, wylosowano kolejno bez zwracania dwie kule.
a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosowano kulę białą.
b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie wylosowane kule są tego samego koloru.
Odp.: a) $\frac{12}{27}\cdot\frac{11}{26} + \frac{9}{27}\cdot\frac{12}{26} + \frac{6}{27}\cdot\frac{12}{26} = \frac{4}{9}$; b) $\frac{12}{27}\cdot\frac{11}{26} + \frac{9}{27}\cdot\frac{8}{26} + \frac{6}{27}\cdot\frac{5}{26} = \frac{1}{3}$.

Zad. 46:
W urnie znajdują się 4 kule białe i 8 czarnych. Z urny wylosowano jedną kulę i odłożono na bok, nie oglądając jej. Z pozostałych wylosowano dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie te kule są czarne.
Odp.: $\frac{4}{12}\cdot\frac{\binom{8}{2}}{\binom{11}{2}} + \frac{8}{12}\cdot\frac{\binom{7}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{14}{33}$.

Zad. 47:
Z urny, w której znajdują się 3 kule białe i 4 czarne, wybieramy losowo jedną kulę, a następnie z pozostałych kul - dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w drugim losowaniu wybrano:
a) dwie kule białe, jeśli za pierwszym razem wybrano kulę czarną;
b) dwie kule białe;
c) kulę białą i czarną.
Odp.: a) $\frac{\frac{4}{7}\cdot\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}}{\frac{4}{7}} = \frac{1}{5}$; b) $\frac{4}{7}\cdot\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{3}{7}\cdot\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{7}$; c) $\frac{4}{7}\cdot\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} + \frac{3}{7}\cdot\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{4}{7}$.

Zad. 48:
Z urny zawierającej 3 kule białe i 7 czarnych losujemy jedną i bez sprawdzania koloru wkładamy ją do urny zawierającej 4 kule białe i 5 czarnych. Następnie losujemy kulę z drugiej urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to kula czarna.
Odp.: $\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10} + \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{10} = 0{,}57$.

Zad. 49:
W trzech jednakowych pudełkach umieszczono po 10 piłeczek. W pierwszym pudełku jest 9 piłeczek czerwonych i 1 zielona, w drugim pudełku jest 6 czerwonych i 4 zielone, a w trzecim 7 czerwonych i 3 zielone. Który sposób postępowania daje większe szanse wylosowania trzech piłeczek czerwonych: I - losowanie najpierw pudełka, a następnie z niego trzech piłeczek, II - losowanie po jednej piłeczce z każdego pudełka?

Odp.: Pierwszy sposób $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} > \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{10} \right)$.

Zad. 50:
Organizator loterii za podstawową opłatę daje do wyboru jeden z dwóch sposobów losowania:
I - wyciągnięcie dwóch losów z urny zawierającej 200 losów, wśród których są 2 wygrywające,
II - wyciągnięcie po jednym losie z dwóch identycznych urn, z których każda zawiera 99 losów pustych i 1 los wygrywający. W którym ze sposobów losowania prawdopodobieństwo wyciągnięcia co najmniej jednego losu wygrywającego jest większe?

Odp.: W pierwszym $\left(1 - \frac{\binom{198}{2}}{\binom{200}{2}} > 1 - \frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} \right)$.

Zad. 51:
Losy pewnej loterii sprzedawane są w kilku punktach. W każdym punkcie sprzedaży znajduje się 70% pustych losów. Pozostałe losy dają szansę wygrania książki lub zestawu kaset wideo. Prawdopodobieństwo wylosowania zestawu kaset jest dwa razy mniejsze od prawdopodobieństwa wylosowania książki.
a) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania trzech książek, jeżeli zakupiono po jednym losie w trzech różnych punktach.
b) Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania przynajmniej jednej nagrody przy zakupie dwóch losów w jednym punkcie sprzedaży, jeżeli są tam do wygrania 2 książki?

Odp.: a) $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$; b) $1 - \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{15}$.

Zad. 52:
W pierwszym pudełku są 4 kule białe i 8 czarnych, a w drugim pudełku są 3 kule białe i n czarnych. Rzucamy dwukrotnie monetą. Jeżeli choć raz wypadnie orzeł, to losujemy jedną kulę z pierwszego pudełka, w przeciwnym wypadku - jedną kulę z drugiego pudełka. Niech B oznacza zdarzenie polegające na tym, że wylosowano kulę białą, a C - wylosowano kulę czarną. Ile kul czarnych jest w drugim pudełku, jeżeli wiadomo, że prawdopodobieństwo zdarzenia C jest dwukrotnie większe od prawdopodobieństwa zdarzenia B? Dla znalezionego n oblicz te prawdopodobieństwa.

Odp.: $n = 6$, $P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Zad. 53:
W pierwszej urnie są 2 kule zielone i 5 niebieskich, w drugiej - 3 zielone i 4 niebieskie. Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wypadnie mniej niż mniej niż 5 oczek, losujemy jedną kulę z dru-

giej urny, w przeciwnym wypadku - z pierwszej.
a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy kulę zieloną?
b) Ile kul zielonych należy dołożyć do pierwszej urny, a ile kul niebieskich z niej usunąć, aby przy nie zmienionej łącznej liczbie kul prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej było równe $\frac{10}{21}$?

Odp.: a) $\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{7}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{7}=\frac{8}{21}$; b) Należy dołożyć dwie kule zielone i zabrać dwie kule niebieskie.

Zad. 54:
Dwa zakłady Z_1 i Z_2 produkują dziennie 5000 sztuk akumulatorów i przekazują je do wspólnego magazynu. Stosunek liczby wytwarzanych akumulatorów przez zakłady Z_1 i Z_2 wynosi 2 : 3. W produkcji zakładu Z_1 aż 40% akumulatorów ma podwyższony okres używalności, a w produkcji Z_2 - 30%. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w danym dniu przypadkowo wybrany z magazynu akumulator ma przedłużony okres używalności.

Odp.: $\frac{2000}{5000}\cdot 0{,}4+\frac{3000}{5000}\cdot 0{,}3=0{,}34$.

Zad. 55:
Dany jest wielokąt wypukły o n wierzchołkach. Wybieramy losowo dwa różne wierzchołki.
a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dla $n = 6$ odcinek o końcach w wybranych punktach jest przekątną tego wielokąta.
*b) Dla jakiej wartości n prawdopodobieństwo wybrania punktów wyznaczających przekątną wielokąta jest większe od 0,99?

Odp.: a) $\frac{3}{5}$; b) $n \in \{202, 203, 204, \ldots\}$.

Zad. 56:
W urnie I są 2 kule białe i 3 kule czarne, a w urnie II - 3 kule białe i 7 kul czarnych. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kul o różnych kolorach, jeśli:
a) losujemy po jednej kuli z każdej urny;
b) najpierw losujemy urnę, a następnie dwie kule z wylosowanej urny.

Odp.: a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{10}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{10}=0{,}46$; b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 3}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 7}{45}=\frac{8}{15}\approx 0{,}53$.

Zad. 57:
Z urny, w której znajdują się 3 kule białe i 2 kule czarne, wybieramy losowo 3 kule, a następnie rzucamy kostką tyle razy, ile wylosowaliśmy białych kul. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz sześciu oczek na kostce.

Odp.: $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}}\cdot\frac{1}{6}+\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}}\cdot\frac{11}{36}+\frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}}\cdot\frac{91}{216}=\frac{119}{432}\approx 0{,}27$.

Zad. 58:
W pudełku znajduje się 5 kul czarnych i 3 kule białe. Rzucamy trzy razy monetą. Jeśli otrzymamy 3 orły, wybieramy losowo z pudełka 3 kule. Jeżeli otrzymamy dwa orły - wybieramy 2 kule. W pozostałych przypadkach wybieramy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu dokładnie jednej kuli czarnej.

Odp.: $\frac{1}{8}\cdot\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}}+\frac{3}{8}\cdot\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}+\frac{4}{8}\cdot\frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}}=\frac{35}{64}\approx 0{,}55$.

Zad. 59:
Student, który potrafi odpowiedzieć na 20 spośród 30 pytań egzaminacyjnych, losuje trzy

pytania. Otrzyma ocenę pozytywną, jeśli odpowie na co najmniej dwa pytania.
a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że student uzyska na egzaminie ocenę pozytywną.
b) O ile zwiększyłoby się prawdopodobieństwo zdania egzaminu, gdyby student znał odpowiedź na 25 pytań?
Odp.: a) $\frac{\binom{20}{3}}{\binom{30}{3}}+\frac{\binom{20}{2}\binom{10}{1}}{\binom{30}{3}}=\frac{152}{203}\approx 0{,}75$; b) $\frac{38}{203}\approx 0{,}19$.

Zad. 60:
W każdym z pudełek jest po 10 losów. W pierwszym pudełku są 3 losy wygrywające, w drugim 4, a w trzecim 7. Możemy wyciągnąć trzy losy na jeden z trzech sposobów: I - wybieramy pudełko, a z niego trzy losy, II - z każdego pudełka wybieramy po jednym losie, III - zsypujemy wszystkie losy do jednego pudełka i wybieramy trzy losy. Który ze sposobów losowania daje największe prawdopodobieństwo wyciągnięcia trzech losów wygrywających?
Odp.: W przypadku sposobu I prawdopodobieństwo jest równe:
$\frac{1}{3}\cdot\frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{9}=0{,}(1)$, w przypadku sposobu II: $\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{7}{10}=0{,}084$, a w przypadku sposobu III: $\frac{\binom{14}{3}}{\binom{30}{3}}=\frac{13}{145}\approx 0{,}0897$.

Zad. 61:
Z pudełka zawierającego *b* kul białych i *c* kul czarnych wybieramy losowo jedną kulę. Jeżeli wylosujemy kulę białą, to rzucamy dwa razy monetą. Jeżeli wylosujemy kulę czarną, to rzucamy trzy razy monetą. Prawdopodobieństwo tego, że w wyniku doświadczenia otrzymaliśmy co najmniej jednego orła, jest równe $\frac{37}{48}$. Oblicz, jaka może być najmniejsza liczba kul każdego rodzaju w pudełku.
Odp.: 5 kul białych i 1 kula czarna.

Zad. 62:
Na półce jest *n* książek, w tym 7 o tematyce historycznej. Dla jakiej najmniejszej liczby *n* prawdopodobieństwo przypadkowego wybrania dwóch książek o tematyce historycznej jest mniejsze od 0,2?
Odp.: n = 16.

Zad. 63:
Ze zbioru liczb naturalnych od 1 do 10 losujemy kolejno bez zwracania trzy liczby. Zdarzenie *A* polega na tym, że suma wylosowanych liczb jest parzysta, zdarzenie *B* - że ich iloczyn jest parzysty, a zdarzenie *C* - że te liczby ustawione w kolejności losowania tworzą ciąg rosnący. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń *A*, *B* i *C* oraz prawdopodobieństwo warunkowe P(A|B).
Odp.: $P(A)=\frac{\frac{5!}{2!}+3\cdot\frac{5!}{3!}\cdot\frac{5!}{4!}}{\frac{10!}{7!}}=\frac{1}{2}$, $P(B)=1-\frac{\frac{5!}{2!}}{\frac{10!}{7!}}=\frac{11}{12}$, $P(C)=\frac{1}{6}$, $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{6}{11}$

Zad. 64:
Ze zbioru $Z=\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ wybieramy losowo dwie liczby, a następnie z pozostałych liczb znów wybieramy dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu za drugim razem co najmniej jednej liczby parzystej.

Odp.: $1-\left(\frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}}\cdot\frac{\binom{50}{2}}{\binom{98}{2}}+\frac{\binom{50}{1}\cdot\binom{50}{1}}{\binom{100}{2}}\cdot\frac{\binom{49}{2}}{\binom{98}{2}}+\frac{\binom{50}{2}\cdot\binom{48}{2}}{\binom{98}{2}}\right)=1-\frac{4753}{19206}\approx 0{,}75$.

Zad. 65:
Salon samochodowy prowadzi sprzedaż aut krajowych i zagranicznych. Ze względu na atrakcyjność oferty producent polski sprzedaje dwa razy więcej pojazdów niż zagraniczny. W czasie transportu aut z fabryki do salonu powstają uszkodzenia, które występują w 0,9% samochodów krajowych i 1,4% zagranicznych. Klient dokonał zakupu auta w salonie.
a) Oblicz prawdopodobieństwo nabycia samochodu bez uszkodzeń.
b) Oblicz prawdopodobieństwo nabycia samochodu posiadającego uszkodzenia.
c) Klient kupił samochód bez uszkodzeń. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że samochód jest produkcji krajowej?
Odp.: a) $\frac{2}{3}\cdot 0{,}991+\frac{1}{3}\cdot 0{,}986=\frac{371}{375}\approx 0{,}99$; b) $\frac{2}{3}\cdot 0{,}009+\frac{1}{3}\cdot 0{,}014=\frac{4}{375}\approx 0{,}01$;
c) $\frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}991}{\frac{371}{375}}=\frac{991}{1484}\approx 0{,}67$.

Zad. 66:
Bartek chodzi do dwóch dyskotek, do pierwszej dwa razy częściej niż do drugiej. Spotyka tam czasami Agnieszkę. Prawdopodobieństwo, że spotka ją w drugiej dyskotece, jest równe $\frac{1}{5}$. Wiedząc, że prawdopodobieństwo spotkania się Bartka z Agnieszką w dyskotece jest równe $\frac{3}{5}$, oblicz, z jakim prawdopodobieństwem Agnieszka chodzi do pierwszej dyskoteki.
Odp.: $\frac{4}{5}$.

Zad. 67:
W pewnej szkole są trzy klasy czwarte liczące po 30 uczniów. W każdej z tych klas jest dokładnie *k* dziewcząt. Do ogólnokrajowego testu wybrano losowo z każdej klasy czwartej jednego ucznia. Dla jakiej wartości *k* prawdopodobieństwo wybrania takiej trójki uczniów, wśród których są dokładnie dwaj chłopcy, jest równe $\frac{4}{9}$?
Odp.: k = 10.

Zad. 68:
Dany jest zestaw 10 zadań. W każdym zadaniu są trzy pytania, na które należy odpowiedzieć TAK lub NIE. Zadanie uznajemy za rozwiązane, jeśli wszystkie trzy odpowiedzi są prawidłowe. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że uczeń, podając losowo odpowiedzi TAK lub NIE, rozwiąże co najmniej 8 zadań? Czy prawdopodobieństwo to jest większe od 2^{-10}?
Odp.: Rozważane prawdopodobieństwo jest równe
$\binom{10}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^8\left(1-\frac{1}{8}\right)^2+\binom{10}{9}\left(\frac{1}{8}\right)^9\left(1-\frac{1}{8}\right)+\binom{10}{10}\left(\frac{1}{8}\right)^{10}=\frac{569}{2^{28}}<2^{-10}$.

Zad. 69: (profil matematyczno-fizyczny)
W pewnej szkole są trzy klasy czwarte liczące po 30 uczniów. W każdej z tych klas jest dokładnie *k* dziewcząt. Do ogólnopolskiego testu wybrano losowo z każdej klasy czwartej jednego ucznia.
a) Dla jakiej wartości *k* prawdopodobieństwo wybrania takiej trójki uczniów, wśród których są dokładnie dwaj chłopcy, jest równe $\frac{25}{72}$?
b) Dla jakiej wartości *k* prawdopodobieństwo wybrania takiej trójki uczniów, wśród których

są dokładnie dwaj chłopcy, jest największe? Oblicz to prawdopodobieństwo.

Odp.: a) $k = 5$ (rozważane prawdopodobieństwo jest równe $3\cdot\frac{k}{30}\cdot\left(\frac{30-k}{30}\right)^2$). b) $k = 10$.

Szukane prawdopodobieństwo jest wówczas równe $\frac{4}{9}$.

Zad. 70: (profil matematyczno-fizyczny)
Rakieta lecąca do pewnego celu jest ostrzeliwana jednocześnie przez dwa obiekty *X* i *Y*. Obiekt *X* zestrzeliwuje średnio 50% rakiet, a obiekt *Y* - 80%.
a) Czy bardziej prawdopodobne jest to, że cel osiągnie pięć rakiet z dziesięciu, czy cztery z ośmiu?
b) Ile co najmniej rakiet należy wystrzelić, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż 0,5 do celu dotarła przynajmniej jedna z nich?

Odp.: a) Cztery rakiety z ośmiu $\left(\binom{10}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^5\left(\frac{9}{10}\right)^5 < \binom{8}{4}\left(\frac{1}{10}\right)^4\left(\frac{9}{10}\right)^4\right)$.

b) Co najmniej 7 $\left(1-\binom{n}{0}\left(\frac{9}{10}\right)^n \geq \frac{1}{2}\right)$.

Zad. 71: (profil matematyczno-fizyczny)
W pudełku znajduje się 6 kul czarnych i 4 kule białe. Rzucamy trzy razy monetą. Jeśli otrzymamy 3 orły, losujemy z pudełka kolejno bez zwracania 3 kule. Jeżeli otrzymamy dwa orły, losujemy 2 kule. W pozostałych przypadkach losujemy jedną kulę. Podaj rozkład i oblicz wartość oczekiwaną liczby wylosowanych kul czarnych.
Odp.:

X	0	1	2	3
P(X = x)	p_0	p_1	p_2	p_3

$$p_0 = \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{3}{8} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{1}{8} = \frac{61}{240},\quad p_1 = \frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{3}{8} + \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{1}{8} = \frac{43}{80},$$

$$p_2 = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{0}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{3}{8} + \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{16},\quad p_3 = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{48};\quad EX = \frac{39}{40}.$$

Zad. 72: (profil matematyczno-fizyczny)
Z pudełka, w którym znajdują się 4 kule białe i 3 czarne, wybieramy losowo 4 kule, a następnie rzucamy kostką tyle razy, ile kul białych znajduje się wśród wylosowanych kul.
a) Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby wykonanych rzutów kostką.
b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na uzyskaniu w wykonanych rzutach kostką co najmniej raz sześciu oczek.

Odp.: a) $EX = \frac{4}{\binom{7}{4}} + 2\cdot\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{7}{4}} + 3\cdot\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{3}}{\binom{7}{4}} + 4\cdot\frac{1}{\binom{7}{4}} = \frac{16}{7},\ D^2X = \frac{24}{49}$;

b) $1-\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{\binom{7}{4}} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{7}{4}} + \left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{3}}{\binom{7}{4}} + \left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{\binom{7}{4}}\right) = \frac{3043}{9072}$.

Zad. 73: (profil matematyczno-fizyczny)
Ze zbioru $Z = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, gdzie $n \geq 1$, losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby *a* i

b. Niech *X* oznacza resztę z dzielenia sumy $a + b$ przez 2.
a) Podaj rozkład i oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej *X*.
b) Zbadaj, jak zmienia się wartość oczekiwana zmiennej losowej *X* wraz ze wzrostem *n*.
Odp.: a)

X	0	1
P(X = x)	$\frac{n^2}{\binom{2n}{n}}$	$\frac{2\binom{n}{2}}{\binom{2n}{n}}$

$EX = 0 \cdot \frac{n-1}{2n-1} + 1 \cdot \frac{n}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$; b) EX jest funkcją malejącą zmiennej *n*, oraz $\lim\limits_{n \to +\infty} EX = \frac{1}{2}$.

Zad. 74: (profil matematyczno-fizyczny)
Pewien człowiek, który chce kupić gazetę za 50 groszy, ma w kieszeni pięć monet po 10 groszy i jedną monetę jednozłotową. Sprzedawca proponuje kupującemu, żeby zamiast płacić 50 groszy, dał mu monetę wybraną losowo z kieszeni.
a) Czy jest to propozycja korzystna dla kupującego, czy dla sprzedawcy?
b) Czy propozycja, żeby zamiast płacić 50 groszy, dać dwie monety wybrane losowo z kieszeni, jest korzystna dla kupującego czy dla sprzedawcy?
Odp.: a) Propozycja jest korzystna dla kupującego (jeśli *X* oznacza wartość monety wyciągniętej z kieszeni, to $EX = 25$ [groszy]). b) Propozycja jest korzystna dla kupującego i dla sprzedawcy ($EX = 50$ [groszy]).

Zad. 75:
Z cyfr 3, 4, 7, 8 wybieramy losowo trzy różne i układamy z nich liczbę, rozpoczynając od cyfry setek. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
a) liczby nieparzystej;
b) liczby podzielnej przez 9;
c) liczby podzielnej przez 3 lub 4.
Odp.: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{7}{12}$.

Zad. 76:
Spośród liczb naturalnych spełniających nierówność $2^{x^2+3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} < 8^{x-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1}$ losujemy kolejno ze zwracaniem dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: *A* - suma wylosowanych liczb nie jest mniejsza od 10, B - obie wylosowane liczby są równe.
Odp.: $P(A) = 0{,}24$, $P(B) = 0{,}2$ $(x \in \{2, 3, 4, 5, 6\})$.

Zad. 77:
Ze zbioru liczb {a, b, c, d}, gdzie: $a = \log_2 100 - 2\log_2 5$, $b = \sqrt{\left(1-\sqrt{6}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{6}+1\right)^2}$,
$c = \mathrm{tg}(-135°) - 3\mathrm{ctg}315°$, $d = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 27^{\frac{1}{4}}$, losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby i tworzymy z nich liczbę dwucyfrową, w której cyfrą dziesiątek jest pierwsza z wylosowanych liczb. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby parzystej lub podzielnej przez trzy.
Odp.: $\frac{7}{12}$ (a = 2, b = 5, c = 4, d = 3).

Zad. 78:
Ze zbioru $Z = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ wybieramy losowo jedną liczbę, a następnie z pozostałych liczb wybieramy dwie różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu za drugim razem dwóch liczb nieparzystych.

Odp.: $\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{49}{2}}{\binom{99}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{50}{2}}{\binom{99}{2}}=\frac{49}{198}$.

Zad. 79:
Ze zbioru $Z = \{1, 2, 3, \ldots, 121\}$ wybieramy losowo jedną liczbę, a następnie z pozostałych liczb wybieramy drugą liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu za drugim razem liczby parzystej.

Odp.: $\frac{60}{121}\cdot\frac{59}{120}+\frac{61}{121}\cdot\frac{60}{120}=\frac{60}{121}$.

Zad. 80:
Ze zbioru liczb całkowitych spełniających nierówność $x^2 - 16 \le 0$ losujemy dwie różne liczby.
a) Zdarzenie *A* polega na wylosowaniu liczb, których suma jest równa 3, a zdarzenie *B* - na wylosowaniu liczb nieujemnych. Sprawdź niezależność zdarzeń *A* i *B*.
b) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których iloczyn jest większy od 5, pod warunkiem, że obie wylosowane liczby są parzyste.

Odp.: a) Zdarzenie *A* i *B* są zależne $\left(P(A)=\frac{6}{72},\ P(B)=\frac{20}{72},\ P(A\cap B)=\frac{4}{72}\right)$. b) $\frac{1}{5}$.

Zad. 81:
W urnie są cztery kule oznaczone numerami 1, 2, 3 i 5. Doświadczenie losowe polega na jednoczesnym wylosowaniu kuli z urny i rzucie kostką do gry. Tworzymy liczbę dwucyfrową, której cyfra dziesiątek jest równa numerowi wylosowanej kuli, a cyfra jedności jest równa liczbie otrzymanych oczek na kostce. Zdarzenie *A* polega na otrzymaniu liczby podzielnej przez 3, zdarzenie *B* - na otrzymaniu liczby, której cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry dziesiątek.
a) Sprawdź, czy zdarzenia *A* i *B* są niezależne.
b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cup B'$.
c) Sprawdź, czy spełniona jest równość $P(A|B) \cdot P(B|A) = P(A \cap B)$.

Odp.: a) Zdarzenia *A* i *B* są niezależne $\left(P(A)=\frac{8}{24},\ P(B)=\frac{3}{24},\ P(A\cap B)=\frac{1}{24}\right)$.

b) $P(A\cup B')=\frac{11}{12}$.

c) $P(A|B)\cdot P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\cdot\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)\cdot P(B)\cdot P(A\cap B)}{P(A)\cdot P(B)}=P(A\cap B)$.

Zad. 82:
Rzucamy dwukrotnie kostką do gry. Określ zbiór zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia.
a) Które ze zdarzeń: A - w pierwszym rzucie otrzymamy liczbę oczek mniejszą niż w drugim, B - suma oczek na obu kostkach jest nie mniejsza od 8, jest bardziej prawdopodobne?
b) Sprawdź, czy zdarzenia *A* i *B* są niezależne.
c) Oblicz prawdopodobieństwo $P(A \cup B)$ oraz $P(A|B)$.

Odp.: $\Omega = \{(i, j)\ :\ i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. a) $P(A)=P(B)=\frac{5}{12}$. b) Zdarzenia *A* i *B* są zależne $\left(P(A\cap B)=\frac{24}{144}\right)$.

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3}$, $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{5}$.

Zad. 83:
Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
A - w każdym rzucie uzyskamy inną liczbę oczek, B - ani razu nie otrzymamy szóstki.
Odp.: $P(A) = \frac{30}{36}$, $P(B) = \frac{25}{36}$.

Zad. 84:
Spośród dwunastu zdjęć, wśród których cztery są kolorowe, wybrano losowo trzy zdjęcia. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych zdjęć:
a) dokładnie dwa są kolorowe;
b) co najmniej jedno jest kolorowe.
Odp.: a) $\dfrac{\binom{4}{2}\binom{8}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{12}{55}$; b) $1 - \dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{41}{55}$.

Zad. 85:
W loterii jest 40 losów, z których dwa losy wygrywają po 100 zł, pięć losów wygrywa po 20 zł, a 10 losów wygrywa po 5 zł. Cena jednego losu wynosi 15 zł. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy zakupie dwóch losów wygrana będzie nie mniejsza niż koszt zakupu tych losów.
Odp.: $\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{40}{2}} + \dfrac{\binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{40}{2}} + \dfrac{\binom{2}{1}\binom{10}{1}}{\binom{40}{2}} + \dfrac{\binom{2}{1}\binom{23}{1}}{\binom{40}{2}} + \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{29}{260}$.

Zad. 86:
W pierwszym pudełku jest 60 losów, z których 10% to losy wygrywające, a w drugim pudełku jest 60 losów, z których $\frac{11}{12}$ to losy przegrywające. Z dowolnie wybranego pudełka wybieramy losowo dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo, że przynajmniej jeden los jest wygrywający.
Odp.: $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \dfrac{\binom{54}{2}}{\binom{60}{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \dfrac{\binom{55}{2}}{\binom{60}{2}}\right) = \frac{52}{295}$.

Zad. 87:
Z pojemnika, w którym znajdują się trzy kule białe, dwie czarne i cztery zielone, wybieramy losowo dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:
a) dwóch kul różnych kolorów;
b) kuli białej, pod warunkiem, że pierwsza wylosowana kula była zielona.
Odp.: a) $\frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{13}{18}$; b) $\dfrac{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{8}$.

Zad. 88:
a) W urnie jest 5 kul białych i 4 czarne. Rzucamy 5 razy symetryczną monetą. Jeżeli liczba reszek różni się od liczby orłów nie więcej niż o jeden, to losujemy z urny dwie kule. W przeciwnym wypadku losujemy z urny trzy kule. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wszystkie wylosowane kule są białe?

*b) Zdarzenia *A* i *B* są niezależne. Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest równe 0,7. Jakie wartości może przyjmować prawdopodobieństwo zdarzenia *B*?

Odp.: a) $\frac{20}{32} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{12}{32} \cdot \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{55}{252}$; b) $P(B) \in \langle 0;1 \rangle$.

Zad. 89:
Z pojemnika, w którym znajduje się 6 kul białych i 5 czarnych, losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Opisz zbiór zdarzeń elementarnych. Sprawdź, czy zdarzenia:
A - wylosowano co najmniej jedną kulę białą, *B* - wylosowano co najwyżej jedną kulę białą, są niezależne.
Odp.: $\Omega = \{\{a, b\} \ : \ a \neq b \ \text{ i } \ a, b \in \{1, 2, \ldots, 11\}\}$. Zdarzenia *A* i *B* są zależne

$$\left(P(A) = 1 - \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{9}{11}, \ P(B) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{8}{11}, \ P(A \cap B) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{6}{11} \right).$$

Zad. 90:
W urnie U_1 są 3 kule niebieskie i 5 kul zielonych, a w urnie U_2 - 3 kule zielone i 4 niebieskie. Z urny U_1 przełożono bez oglądania jedną kulę do urny U_2, a następnie wylosowano kulę z urny U_2. Co jest bardziej prawdopodobne: wylosowanie z urny U_2 kuli zielonej, czy niebieskiej?
Odp.: Wylosowanie kuli niebieskiej $\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{8} = \frac{35}{64} > 1 - \frac{35}{64}\right)$.

Zad. 91:
W pewnej szkole są dwie klasy czwarte liczące po 30 uczniów. W każdej z tych klas jest dokładnie *k* dziewcząt. Z każdej klasy czwartej wybrano jednego ucznia. Dla jakiej wartości *k* prawdopodobieństwo wybrania w ten sposób jednego chłopca i jednej dziewczyny jest:
a) równe $\frac{12}{25}$;
b) możliwie największe?
Odp.: a) k = 12 lub k = 18; b) k = 15.

Zad. 92:
Trzech koszykarzy trafia piłką do kosza z prawdopodobieństwami: 0,8, 0,6 i 0,4. Każdy z nich wykonuje kolejno po jednym rzucie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że piłka wpadnie do kosza:
a) dokładnie jeden raz;
b) co najmniej jeden raz;
c) co najwyżej jeden raz?
Odp.: a) $0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,296$;
b) $1 - 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 1 - 0,048 = 0,952$; c) $0,296 + 0,048 = 0,344$.

Zad. 93:
Obok pewnej stacji benzynowej przejeżdża średnio 3 razy więcej samochodów ciężarowych niż osobowych. Prawdopodobieństwo tego, że przejeżdżający samochód osobowy będzie nabierał paliwo, wynosi 0,01, a ciężarowy - 0,05. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przejeżdżający obok tej stacji samochód będzie nabierał paliwo?
Odp.: $\frac{3}{4} \cdot 0,05 + \frac{1}{4} \cdot 0,01 = 0,04$.