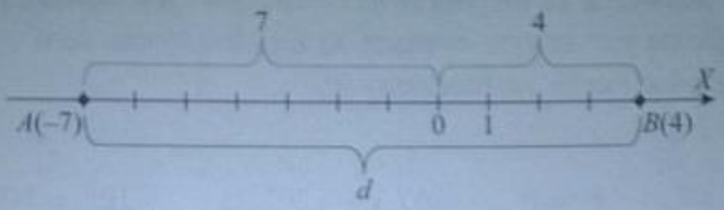
4. Wartość bezwzględna

Aby obliczyć **odległość** między punktami $A(a)$ i $B(b)$ na osi liczbowej (odległość oznaczamy zwykle literą d), należy od większej współrzędnej punktu odjąć mniejszą współrzędną, na przykład:

$A(-7)$ $\quad B(4)$ $\quad d = 4 - (-7) = 4 + 7 = 11$



1. Oblicz odległość d między punktami $A(a)$ i $B(b)$ na osi liczbowej.

a) $a = 4$ $\quad b = 7$

b) $a = 5$ $\quad b = -3$

c) $a = -2$ $\quad b = 4{,}7$

d) $a = -6{,}32$ $\quad b = -3{,}11$

e) $a = 0$ $\quad b = 3{,}6$

f) $a = -5{,}23$ $\quad b = 0$

g) $a = 2\frac{1}{5}$ $\quad b = -3{,}8$

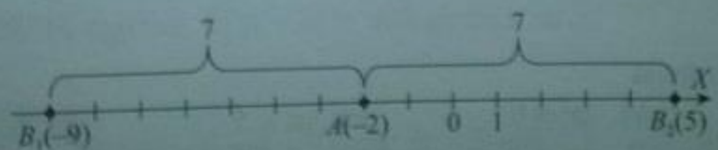
h) $a = -3\frac{1}{3}$ $\quad b = -2\frac{3}{7}$

i) $a = 2{,}13$ $\quad b = 2{,}13$

Jeżeli szukamy punktu $B(b)$ odległego od punktu $A(a)$ o daną odległość d, trzeba na osi liczbowej odłożyć odległość d, zarówno w prawo, jak i w lewo od punktu A. Otrzymamy wtedy wartości $b = a + d$ lub $b = a - d$.

Przykład

Znajdźmy współrzędne punktu B odległego od punktu A o odległość d, jeśli: $A(-2)$, $d = 7$.



$b = -2 - 7 = -9$ lub $b = -2 + 7 = 5$

Są dwa takie punkty: $B_1(-9)$, $B_2(5)$.

2. Znajdź na osi liczbowej współrzędne punktu B odległego od punktu A o podaną odległość d.

a) $A(3)$ $d=7$
b) $A(-1)$ $d=4$
c) $A(0)$ $d=8$
d) $A(-5{,}2)$ $d=3{,}9$
e) $A(7)$ $d=0$
f) $A(-4)$ $d=108$
g) $A\left(2\frac{1}{3}\right)$ $d=2\frac{1}{3}$
h) $A\left(-3\frac{2}{9}\right)$ $d=4\frac{1}{3}$

Wartość bezwzględna liczby x to jej odległość od zera (niektórzy mówią: moduł x, co jest raczej uznawane za niepoprawne). Odległość jest zawsze nieujemna, więc wartość bezwzględna jest zawsze większa od zera lub równa zero.
Wartość bezwzględną liczby x oznaczamy $|x|$.
$|x| \geq 0$

$|2| = 2$ $|-7| = 7$ $|0| = 0$ $|207{,}35| = 207{,}35$ $|-102| = 102$ $\left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$

$|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ $|5-\sqrt{3}| = 5-\sqrt{3}$ $|2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$ (zastanów się, dlaczego?)

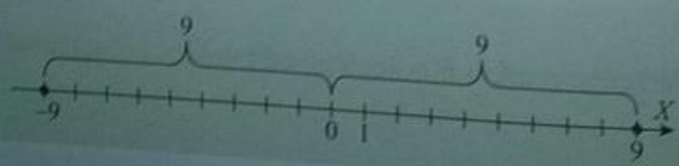
$\left|\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3}$

Przykład

Rozwiążmy równanie.

$|x| = 9$

Zastanówmy się, jakie liczby są odległe od zera o 9. Odpowiedź wydaje się oczywista. Jest to 9 lub –9.
A więc $|x| = 9$ wtedy, gdy $x = 9$ lub $x = -9$.
Możemy to narysować.



3. Rozwiąż równania.

a) $|x| = 11$
b) $|x| = 0$
c) $|x| = 5$
d) $|x| - 1 = 0$
e) $|x| - 8 = -4$
f) $|x| = -3$
g) $|x| + 2 = 5$
h) $|x| - 3 = -6$
i) $4|x| = 24$
j) $3|x| - 1 = 32$

Jeżeli $a > 0$, to $|t| = a$ ma dwa rozwiązania: $t = a$ lub $t = -a$.
Jeżeli $a = 0$, to $|t| = a$ ma postać $|t| = 0$ i ma jedno rozwiązanie: $t = 0$.
Jeżeli $a < 0$, to $|t| = a$ nie ma rozwiązań, bo wartość bezwzględna wyrażenia nie może przyjmować wartości ujemnych.

A co zrobić, gdy obliczamy wartość bezwzględną wyrażenia bardziej złożonego?

Przykład

Rozwiążmy równanie.

$|x-2| = 4$

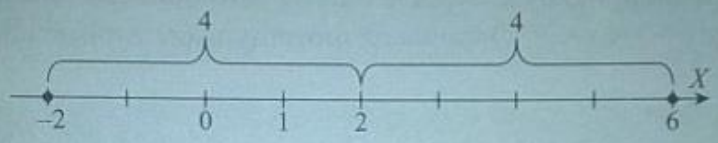
W miejsce $x-2$ możemy wstawić na przykład t.

Otrzymamy: $|t| = 4$, czyli $t = 4$ lub $t = -4$.

Ponieważ $t = x - 2$, to $x - 2 = 4$ lub $x - 2 = -4$

$x = 6$ lub $x = -2$

Zobaczmy, jak to wygląda na rysunku.



Można zauważyć, że obie te liczby są odległe o 4 od $x = 2$.

Przykład

Rozwiążmy równanie.

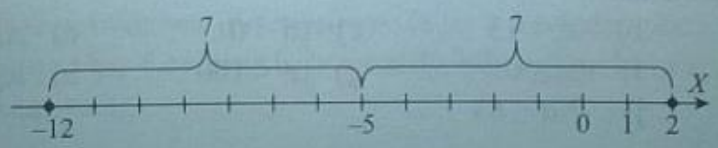
$|x+5| = 7$

$t = x + 5$

$|t| = 7$, czyli $t = 7$ lub $t = -7$, a więc

$x + 5 = 7$ lub $x + 5 = -7$

$x = 2$ lub $x = -12$



I znowu widać, że obie znalezione liczby są odległe o 7 od liczby -5.

Możemy powiedzieć ogólnie, że $|x-a|$ to odległość x od a.

4. Rozwiąż równania.

a) $|x-7| = 2$ b) $|x+3| = 4$ c) $|x-5| = 0$ d) $|x+1| = -2$

e) $|2x-1| = 5$ f) $|4-3x| = 2$ g) $|7x-4| = 1$ h) $|11x-3| = 3$

i) $2|x+4| = 18$ j) $3|7-x| = 42$

5. Rozwiąż równania (przenieś liczby na jedną stronę równania).

a) $|x-3| + 2 = 7$ b) $4 - |x+2| = 1$ c) $|x+4| - 5 = 2$

d) $|x-7| + 4 = 3$ e) $|2x-7| - 9 = 11$ f) $|4-7x| + 3 = 7$

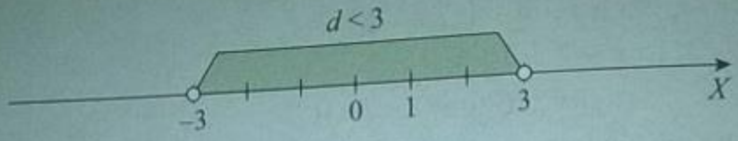
g) $5 + |3x-1| = 6$ h) $|2x-11| - 11 = 4$ i) $2|3x-5| - 4 = 6$

Przykład

Rozwiążmy nierówność.

$|x| < 3$

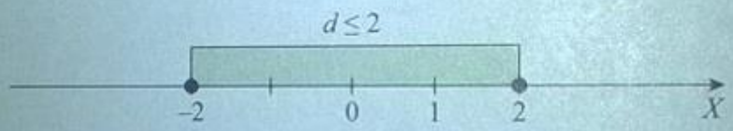
Skoro $|x|$ to odległość x od zera, to znaczy, że szukamy takich liczb x, których odległość od zera jest mniejsza od 3.



Ten warunek spełniają liczby x większe od -3 i równocześnie mniejsze od 3.
$|x| < 3$ wtedy, gdy $-3 < x < 3$. Odpowiedź możemy także zapisać tak: $x \in (-3; 3)$.

Przykład

Jeżeli rozwiązujemy nierówność $|x| \leq 2$, to odległość x od 0 musi być mniejsza bądź równa 2, a zatem $-2 \leq x \leq 2$, co możemy zapisać także tak: $x \in \langle -2; 2\rangle$.



Dla $a > 0$ prawdziwa jest nierówność $|x| < a$, jeżeli $-a < x < a$ oraz $|x| \leq a$, jeżeli $-a \leq x \leq a$.

6. Rozwiąż nierówności.

a) $|x| < 7$ b) $|x| < 13$ c) $|x| < 0$ d) $|x| \leq 6$
e) $|x| < -1$ f) $|x| \leq 0$ g) $|x| < 100$ h) $|x| \leq 9$
i) $5|x| < 30$ j) $7|x| \leq 63$

Podobnie rozwiązujemy nierówności, gdy w wartości bezwzględnej znajduje się bardziej rozbudowane wyrażenie.

Przykład

Rozwiążmy nierówność.

$|2x - 3| \leq 7$

Tak jak w równaniach, podstawiamy: $t = 2x - 3$.

$|t| \leq 7$, czyli $-7 \leq t \leq 7$ – po podstawieniu
$-7 \leq 2x - 3 \leq 7 \quad |+3$
$-7 + 3 \leq 2x - 3 + 3 \leq 7 + 3$
$-4 \leq 2x \leq 10 \quad |:2$
$-2 \leq x \leq 5$, czyli $x \in \langle -2; 5\rangle$

7. Rozwiąż nierówności.

a) $|x-4|<7$
b) $|x+2|<3$
c) $|x-1|\leq 6$
d) $|x+4|<0$
e) $|2x+5|<4$
f) $|3x-1|\leq 8$
g) $|5x+4|<1$
h) $|3-7x|<11$
i) $4|x-4|<8$
j) $7|x+2|<21$
k) $\frac{2}{3}|x-1|\leq 18$

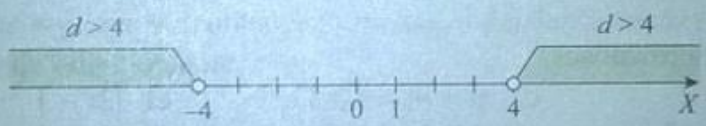
Nieco inaczej wygląda sytuacja, jeżeli zadamy pytanie: Dla jakich x wartość bezwzględna x jest większa od pewnej liczby?

Przykład

Rozwiążmy nierówność.

$$|x|>4$$

W tym przypadku szukamy wszystkich liczb, których odległość od zera jest większa niż 4.



Trzeba zauważyć, że ta nierówność jest spełniona, jeżeli $x<-4$ lub $x>4$, co możemy zapisać $x\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

A zatem dla $a>0$ prawdziwa jest nierówność $|x|>a$ wtedy, gdy $x<-a$ lub $x>a$, czyli $x\in(-\infty;-a)\cup(a;+\infty)$, oraz $|x|\geq a$ wtedy, gdy $x\leq -a$ lub $x\geq a$, czyli $x\in(-\infty;-a\rangle\cup\langle a;+\infty)$.

8. Rozwiąż nierówności.

a) $|x|>7$
b) $|x|\geq 11$
c) $|x|>0$
d) $|x|\geq 0$
e) $|x|>19$
f) $|x|>-1$
g) $|x|>5$
h) $|x|\geq 123$
i) $4|x|>12$
j) $5|x|\geq 75$
k) $0{,}5|x|\geq 10$

Przykład

Rozwiążmy nierówność.

$$|4x - 3| > 5$$

Niech $t = 4x - 3$, wtedy $|t| > 5$, czyli $t < -5$ lub $t > 5$.

$4x - 3 < -5$ lub $4x - 3 > 5$

$4x < -2$ lub $4x > 8$

$x < -\frac{1}{2}$ lub $x > 2$

$|4x - 3| > 5$, gdy $x < -\frac{1}{2}$ lub $x > 2$

albo to samo zapisane w postaci sumy przedziałów: $x \in (-\infty; -0,5) \cup (2; +\infty)$

9. Rozwiąż nierówności.

a) $|x - 3| > 4$
b) $|x + 7| \geq 3$
c) $|x - 6| > 0$
d) $|2x + 3| > 9$
e) $|3x - 4| \geq 4$
f) $|9 - 2x| > 1$
g) $|5x + 2| \geq 3$
h) $|3x - 1| > -1$
i) $2|x + 4| > 20$
j) $8|2x - 6| \geq 64$

10. Rozwiąż nierówności.

a) $4 - |x - 2| < 2$
b) $|x + 4| + 7 \geq 11$
c) $|2x - 1| - 2 < 5$
d) $9 + |4x + 7| < 7$
e) $4 \geq 5 - |x + 11|$
f) $|7x - 2| + 2 > 9$
g) $|2x + 5| - 6 \leq -1$
h) $|x - 5| + 11 \geq 11$
i) $3|x - 7| - 13 > 5$
j) $8 - 5|3x + 9| \geq -22$