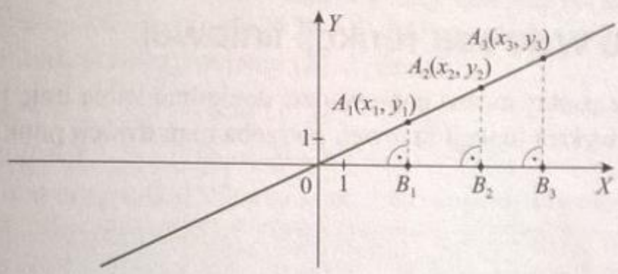
6. Funkcja liniowa

Jeżeli każdemu elementowi x ze zbioru X jest przyporządkowany dokładnie jeden element y należący do zbioru Y, to takie przyporządkowanie nazywamy **funkcją**. Zajmiemy się jedną z najprostszych funkcji – **funkcją liniową**.

Funkcja liniowa, to funkcja, której wykresem jest **linia prosta**.
Nie każda linia prosta w układzie współrzędnych jest wykresem funkcji liniowej. Proste prostopadłe do osi OX nie są wykresami funkcji. Wszystkie pozostałe – tak.

Zastanówmy się, jaki wzór ogólny ma funkcja liniowa. Zaczniemy od dowolnej prostej przechodzącej przez środek układu współrzędnych.



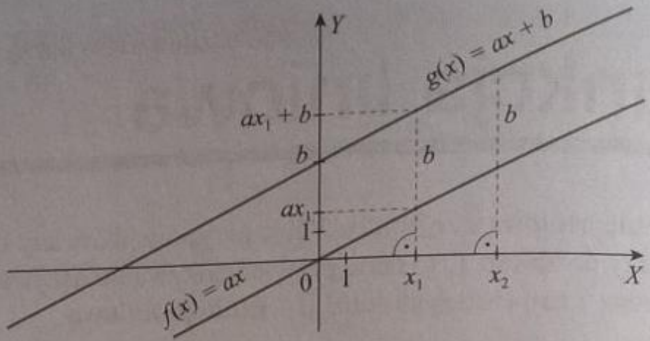
Trójkąty OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3 są do siebie podobne – mają takie same kąty.

Zachodzi zatem równość $\frac{|A_1B_1|}{|OB_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|OB_2|} = \frac{|A_3B_3|}{|OB_3|}$, co – uwzględniając współrzędne punktów i ich znaki – możemy zapisać następująco: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}$.

Dla dowolnego (poza (0, 0)) punktu tej prostej stosunek $\frac{y}{x}$ jest stały. Oznaczmy go przez a. Możemy zatem zapisać $\frac{y}{x} = a$ albo $y = ax$.

Każda funkcja liniowa, której wykres przechodzi przez punkt (0, 0), ma wzór $\boldsymbol{f(x) = ax}$.
Wartość $\boldsymbol{a}$ nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** funkcji liniowej.

Zastanówmy się, jak wygląda wzór dowolnej funkcji liniowej. Narysujmy dowolny wykres funkcji liniowej i drugi równoległy do niego, przechodzący przez punkt (0, 0), o którym już wiemy, że jest wykresem funkcji o wzorze $f(x) = ax$.



Dla dowolnego x wartość funkcji f wynosi ax, a wartość funkcji g jest o b większa, gdzie b to miejsce, w którym funkcja g przecina oś OY, czyli $g(x) = ax + b$. I to jest właśnie poszukiwany wzór ogólny funkcji liniowej.
Wzór ogólny funkcji liniowej: $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$.
Wartość $\boldsymbol{b}$ nazywamy **współczynnikiem przesunięcia** wykresu funkcji liniowej.

Rysowanie wykresu funkcji liniowej

Przez dwa różne punkty można poprowadzić dokładnie jedną linię prostą. A zatem, aby narysować wykres funkcji liniowej, potrzeba nam dwóch punktów należących do wykresu.

Przykład

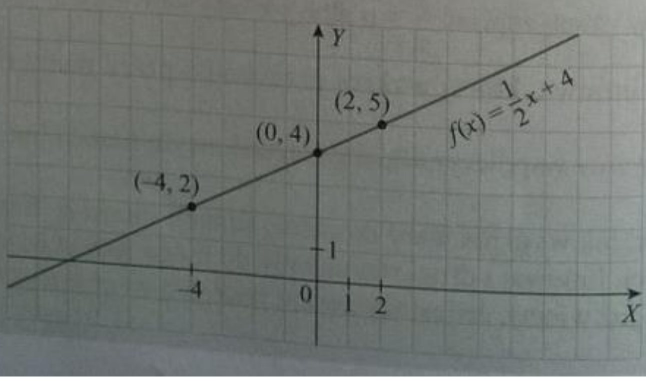
Narysujmy wykres funkcji $f(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4$$

Wyznaczamy co najmniej dwa punktu należące do wykresu funkcji, podstawiając dowolne argumenty, na przykład $x = 2,\ x = 0,\ x = -4$.

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 4 = 1 + 4 = 5 \quad f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 4 = 4 \quad f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 4 = 2$$

Trzeci punkt jest dla sprawdzenia, czy dobrze obliczyliśmy. Jeśli dobrze, to te trzy punkty będą leżały na jednej linii prostej. Zaznaczamy punkty (2, 5), (0, 4), (–4, 2) w układzie współrzędnych i rysujemy wykres.



1. Narysuj wykres funkcji liniowej.

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $f(x) = -3x + 2$ c) $f(x) = \frac{2}{5}x - 1$ d) $f(x) = -\frac{3}{2}x - 3$

e) $f(x) = 2$ f) $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$ g) $f(x) = \frac{5}{2}x - 1$ h) $f(x) = 5x - 4$

Ponieważ x dobieramy w sposób dowolny, to w przykładach z ułamkami dobrze jest podstawiać wielokrotności mianownika (na przykład w punkcie f) 0, 3, –3 lub 12).

Obliczanie wzorów funkcji liniowych

Mając dwa punkty należące do wykresu funkcji liniowej, możemy podać jej wzór.

Przykład

Punkty $K(2, 7)$ i $L(6, -9)$ należą do wykresu funkcji liniowej. Podajmy jej wzór. Wzór ogólny funkcji liniowej to $f(x) = ax + b$. Podstawiamy współrzędne punktów K i L do wzoru funkcji i otrzymujemy układ równań.

$$\begin{cases} 7 = 2a + b \\ -9 = 6a + b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 7 - 2a \\ b = -9 - 6a \end{cases}$$

Ponieważ b w obu przypadkach jest to samo, otrzymujemy równanie:

$$7 - 2a = -9 - 6a$$
$$6a - 2a = -9 - 7$$
$$4a = -16$$
$$a = -4 \qquad b = 7 - 2 \cdot (-4) = 15$$

Wzór poszukiwanej funkcji to: $f(x) = -4x + 15$.

2. Znajdź wzór funkcji liniowej, wiedząc, że punkty A i B należą do jej wykresu.

a) $A(4, -1)$, $B(8, 1)$ b) $A(-4, 7)$, $B(0, 3)$ c) $A(2, 6)$, $B(7, 21)$
d) $A(3, -3)$, $B(5, 1)$ e) $A(10, 7)$, $B(-5, -2)$ f) $A(1, -1)$, $B(-3, -25)$
g) $A(103, 101)$, $B(11, 9)$ h) $A(3, 6)$, $B(17, 6)$

Punkty przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych

Bardzo łatwo znaleźć punkt przecięcia wykresu funkcji liniowej z osią OY. Ponieważ wszystkie punkty osi OY mają pierwszą współrzędną $x = 0$, to $f(0) = a \cdot 0 + b = b$.
Punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY to $\mathbf{(0, b)}$.
Wszystkie punkty osi OX mają drugą współrzędną $y = 0$. A zatem do wzoru funkcji w miejsce $f(x)$ trzeba wstawić 0.

$$f(x) = ax + b$$

$0 = ax + b$
$-ax = b$
$x = -\frac{b}{a}$ dla $a \neq 0$

Punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OX to $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ dla $a \neq 0$.

Jeżeli $a = 0$, to funkcja liniowa jest stała i albo nie ma punktów przecięcia z osią OX, albo jej wykres pokrywa się z osią OX.

Przykład

Znajdźmy punkty przecięcia wykresu funkcji $f(x) = -6x - 3$ z osiami układu współrzędnych.

Z osią OY: $x = 0$; $f(0) = -6 \cdot 0 - 3 = -3$ punkt $A(0, -3)$

Z osią OX: $y = 0$; $0 = -6x - 3$
$6x = -3$
$x = -0{,}5$ punkt $B(-0{,}5, 0)$

3. Znajdź punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = 2x - 4$
b) $f(x) = -3x + 2$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$
d) $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{2}$
e) $f(x) = 4x + 3$
f) $f(x) = -\frac{3}{2}x - 10$
g) $f(x) = -5x + 1$
h) $f(x) = 4$
i) $f(x) = 0$

Miejsce zerowe funkcji

Miejsce zerowe funkcji to taki argument x, dla którego wartość funkcji $y = 0$.

Przykład

Obliczmy miejsce zerowe funkcji $f(x) = 7x + 14$.

$f(x) = 7x + 14$
$0 = 7x + 14$
$-7x = 14$
$x = -2$

Miejscem zerowym tej funkcji jest $x = -2$.

Zauważmy, że wartość miejsca zerowego to pierwsza współrzędna punktu przecięcia wykresu funkcji z osią OX.

4. Oblicz miejsca zerowe funkcji.

a) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 5$ b) $f(x) = 3x - 11$ c) $f(x) = -2x + \left(-\frac{4}{3}\right)$

d) $f(x) = -\frac{7}{3}x - 7$ e) $f(x) = 4$ f) $f(x) = 5x - \frac{1}{5}$

Wartości dodatnie i ujemne funkcji

W niektórych sytuacjach chcemy wiedzieć, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości mniejsze bądź większe od zadanej liczby.

Przykład

Dla jakich argumentów x funkcja $y = 3x - 1$ przyjmuje wartości większe od 5?
Wartości funkcji to y, więc y musi być większe od 5.

$y > 5$, a ponieważ $y = 3x - 1$, zatem:

$3x - 1 > 5$

$3x > 6 \quad |:3$

$x > 2$

Wartości funkcji $f(x) = 3x - 1$ są większe od 5 dla $x > 2$.

5. Dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x)$ są większe od t?

a) $f(x) = 5x + 2 \quad t = 17$ b) $f(x) = -2x + 7 \quad t = -4$

c) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 2 \quad t = 8$ d) $f(x) = \frac{5}{4}x + 5 \quad t = 3$

e) $f(x) = 4x + 9 \quad t = 0$ f) $f(x) = \frac{7}{3}x - 11 \quad t = -7$

6. Dla jakich argumentów x wartości funkcji $f(x)$ są mniejsze od t?

a) $f(x) = 5x - 7 \quad t = -3$ b) $f(x) = -3x + 4 \quad t = -11$

c) $f(x) = -\frac{4}{11}x \quad t = -20$ d) $f(x) = \frac{2}{7}x - 1 \quad t = 0$

e) $f(x) = -4x + 7 \quad t = -9$ f) $f(x) = 5 \quad t = 6$

Często pytamy, dla jakich wartości argumentów x funkcja przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich dodatnie. Na takie pytanie możemy odpowiedzieć na dwa sposoby. Pierwszy to zbadanie, podobnie jak poprzednio, dla jakich argumentów x funkcja przyjmuje wartości większe od 0, a dla jakich mniejsze od 0. Drugi sposób to odczytanie własności z wykresu.

Przykład

Sprawdźmy, dla jakich argumentów funkcja $f(x) = -2x + 6$ przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

Sposób I

$f(x) > 0$, gdy $-2x + 6 > 0$

$-2x > -6 \quad | : (-2)$

$x < 3$ – zmiana znaku nierówności, bo dzielimy przez liczbę ujemną

$f(x) > 0$, gdy $x < 3$.

$f(x) < 0$, gdy $-2x + 6 < 0$

$-2x < -6 \quad | : (-2)$

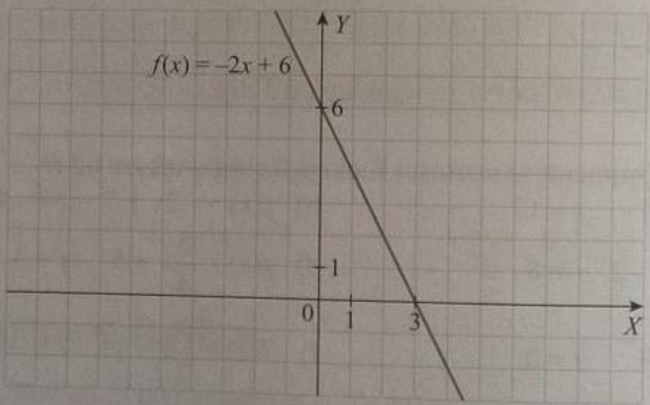
$x > 3$

$f(x) < 0$, gdy $x > 3$

Sposób II

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = -2x + 6$.

$f(0) = 6, \quad f(4) = -2 \cdot 4 + 6 = -2$



W punkcie, w którym wykres przecina oś OX (miejsce zerowe $x = 3$), funkcja zmienia wartości z dodatnich (wykres znajduje się nad osią OX) na ujemne (wykres znajduje się pod osią OX). Zatem dla x mniejszych od 3 wartości funkcji są dodatnie, a dla x większych od 3 wartości funkcji są ujemne. Możemy zapisać:

$f(x) > 0$, dla $x < 3$

$f(x) < 0$, dla $x > 3$.

7. Dla jakich argumentów x funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne? Spróbuj rozwiązać zadanie dwoma sposobami.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = 4x + 8$

c) $f(x) = -3x + 12$

d) $f(x) = -\frac{5}{3}x - 7$

e) $f(x) = -3$

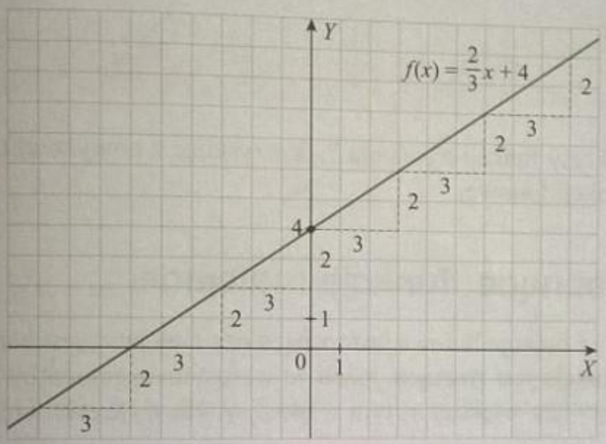
f) $f(x) = \frac{2}{3}x + 8$

Inny sposób rysowania wykresu funkcji liniowej $f(x) = ax + b$

Przykład

Narysujmy wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$.

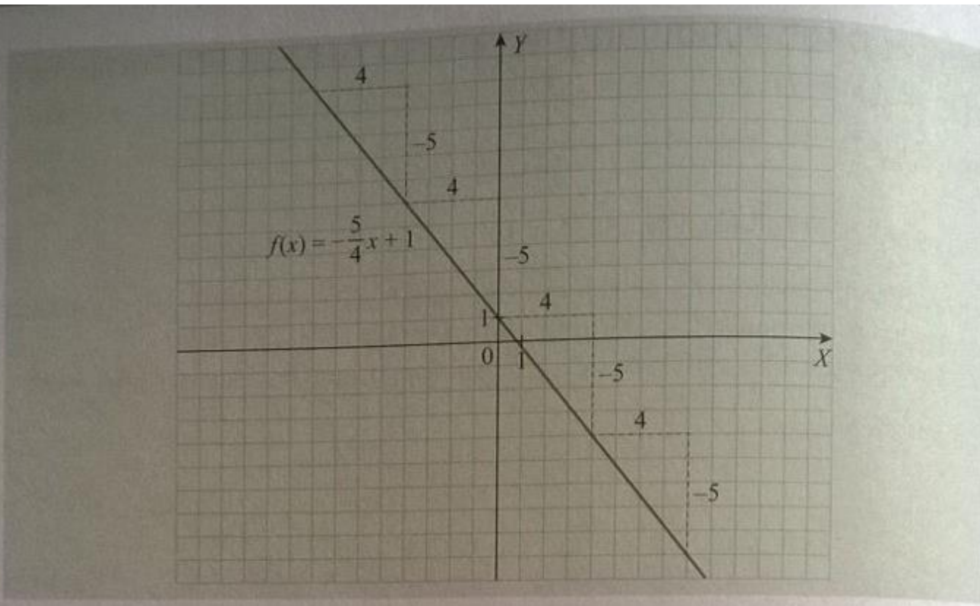
Oczywiście, do wykresu tej funkcji należy punkt (0, 4). Łatwo sprawdzić, że należą do niego również punkty (3, 6), (6, 8), (9, 10), a także (−3, 2), (−6, 0). Zauważmy, że jeżeli x zwiększa się o 3, to y rośnie o 2, co jest zapisane jako współczynnik kierunkowy $a = \frac{2}{3}$.



Przykład

Narysujmy wykres funkcji $f(x) = -\frac{5}{4}x + 1$.

Do wykresu funkcji należy punkt (0, 1). Na wykresie możemy sprawdzić, że jeżeli x rośnie o 4, to y maleje o 5. Jest to zapisane we współczynniku kierunkowym $a = \frac{-5}{4}$.



8. Narysuj wykresy funkcji z zadania **7.**, korzystając z powyższej metody rysowania wykresu funkcji liniowej.

Funkcja rosnąca, funkcja malejąca

Stwierdzenie, czy funkcja liniowa jest rosnąca czy malejąca, jest bardzo łatwe. Mówimy, że funkcja jest **rosnąca**, jeżeli ze wzrostem argumentów wzrastają wartości. To znaczy – im większy x, tym większy y. Na wykresie widać to jako linię wznoszącą się.
Mówimy, że funkcja jest **malejąca**, jeżeli ze wzrostem argumentów maleją wartości. To znaczy – im większy x, tym mniejszy y. Na wykresie widać to jako linię opadającą.

Funkcja liniowa jest **rosnąca** dla $a > 0$, **malejąca** dla $a < 0$, **stała** dla $a = 0$.

9. Określ, czy funkcje liniowe z zadania **7.** są rosnące czy malejące.

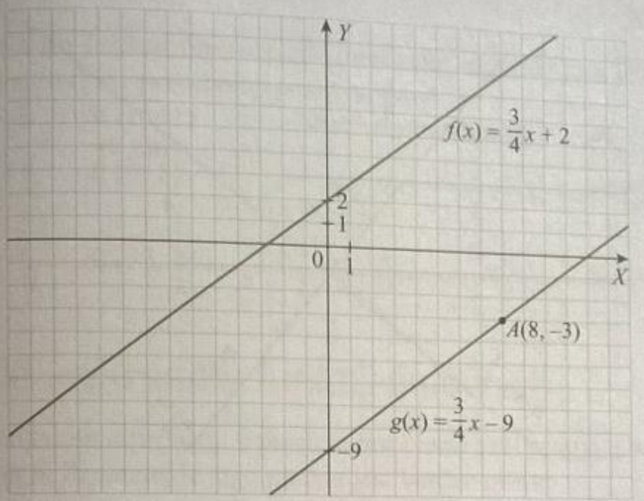
Funkcje o wykresach równoległych

Załóżmy, że mamy daną funkcję liniową $f(x) = a_1x + b_1$ i poszukujemy drugiej funkcji $g(x) = a_2x + b_2$ o wykresie równoległym do danej. Wcześniej pokazaliśmy, że kierunek linii prostej, będącej wykresem funkcji liniowej, związany jest ze współczynnikiem kierunkowym a. Zatem jeżeli wykresy mają być równoległe, to współczynniki kierunkowe obu funkcji muszą być takie same.

$f \parallel g$ wtedy, gdy $a_1 = a_2$

Przykład

Wyznaczmy wzór funkcji liniowej $g(x)$, wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkt $A(8, -3)$ i jest równoległy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$.



Przyjmijmy, że $g(x) = ax + b$.

Jeżeli $g \parallel f$, to $a = \frac{3}{4}$, czyli $g(x) = \frac{3}{4}x + b$.

Punkt $A(8, -3)$ należy do wykresu funkcji g, zatem jego współrzędne spełniają równanie funkcji g.

$$-3 = \frac{3}{4} \cdot 8 + b$$
$$-3 = 6 + b$$
$$b = -9$$
$$g(x) = \frac{3}{4}x - 9$$

10. Wyznacz wzór funkcji liniowej $g(x)$, wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkt A i jest równoległy do wykresu funkcji $f(x)$.

a) $f(x) = 3x - 8$ $\quad A(1, 1)$

b) $f(x) = 1 - 4x$ $\quad A(2, 7)$

c) $f(x) = -\frac{4}{3}x + 7$ $\quad A(-3, 2)$

d) $f(x) = \frac{2}{5}x + 1$ $\quad A(15, -3)$

e) $f(x) = 7$ $\quad A(4, -3)$

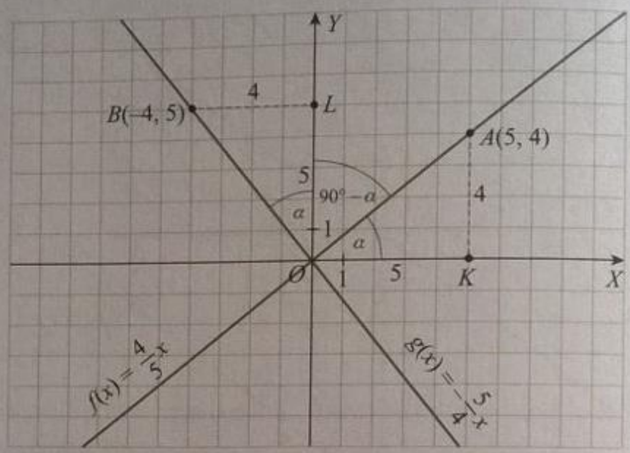
f) $f(x) = 2x - 11$ $\quad A(51, 1)$

g) $f(x) = -\frac{3}{4}x$ $\quad A(0, 14)$

h) $f(x) = \frac{1}{7}x - 123$ $\quad A(-7, 0)$

Funkcje liniowe o wykresach prostopadłych

Narysujmy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: $f(x) = \frac{4}{5}x$ i $g(x) = -\frac{5}{4}x$.



Trójkąty OKA i OLB są przystające, z czego możemy wywnioskować, że wykresy funkcji $f(x)$ i $g(x)$ są do siebie prostopadłe.
Zauważ, że iloczyn współczynników kierunkowych jest równy -1.

11. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji.

a) $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = -0{,}5x - 4$

b) $f(x) = -\frac{2}{3}x$ i $g(x) = 1{,}5x + 4{,}5$

c) $f(x) = \frac{7}{3}x + 2$ i $g(x) = -\frac{3}{7}x + 2$

Przykład

Wyznaczmy wzór funkcji liniowej $g(x)$ o wykresie prostopadłym do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$, wiedząc, że punkt $A(-9, 4)$ należy do wykresu funkcji $g(x)$.

Niech $g(x) = ax + b$.

Wykresy f i g są do siebie prostopadłe, zatem a jest „ujemną odwrotnością” $\frac{3}{4}$, czyli $a = -\frac{4}{3}$.

$$g(x) = -\frac{4}{3}x + b$$

Punkt $A(-9, 4)$ należy do wykresu funkcji g, czyli $4 = -\frac{4}{3} \cdot (-9) + b$, skąd $b = -8$.

Wzór funkcji g to $g(x) = -\frac{4}{3}x - 8$.

12. Wyznacz wzór funkcji liniowej $g(x)$, wiedząc, że jej wykres jest prostopadły do wykresu funkcji $f(x)$ i przechodzi przez punkt A.

a) $f(x) = 2x - 5 \quad A(7, -11)$

b) $f(x) = -5x - 1 \quad A(4, 7)$

c) $f(x) = \frac{5}{2}x + 4 \quad A(15, 1)$

d) $f(x) = -\frac{2}{7}x + 1 \quad A(-8, 2)$

e) $f(x) = 3x + 7 \quad A(123, 74)$

f) $f(x) = -\frac{8}{3}x - 1 \quad A(-24, -33)$

Przecięcie wykresów funkcji liniowych

Czasem potrzebujemy informacji o punkcie przecięcia linii prostych bądź wykresów funkcji liniowych. Znalezienie tego punktu jest bardzo proste.

Przykład

Wyznaczmy współrzędne punktu przecięcia wykresów funkcji $f(x)$ i $g(x)$.

$$f(x) = 2x + 4, \qquad g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$$

Szukamy punktu wspólnego wykresów funkcji, a więc miejsca, gdzie $f(x) = g(x)$.

$$2x + 4 = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$2x + \frac{1}{2}x = -1 - 4$$

$$\frac{5}{2}x = -5 \quad \Big| : \frac{5}{2}$$

$$x = -2 \qquad f(-2) = 2 \cdot (-2) + 4 = -4 + 4 = 0$$

Punkt przecięcia wykresów to $A(-2, 0)$.

13. Wyznacz punkt przecięcia wykresów funkcji liniowych.

a) $f(x) = 3x - 1 \quad g(x) = 5x + 7$

b) $f(x) = -2x + 3 \quad g(x) = 5x - 25$

c) $f(x) = 4 \quad g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

d) $f(x) = \frac{10}{3}x + 5 \quad g(x) = \frac{1}{3}x - 4$

e) $f(x) = 2x - 3 \quad g(x) = -\frac{3}{2}x + 11$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x - 2 \quad g(x) = \frac{1}{2}x + 1$